

аз он кубури дуум дар алоҳидагӣ ҳавзро баъд аз 5 соату 45 дақиқа пур кард. Ҳар як кубур дар алоҳидагӣ дар чанд соат ҳавзро бо об пур карда метавонад?

652. Оё нуқтаи а) $M(1,5; -225)$; б) $N(-3; -90)$ ба графики функсияи $y = -100x^2$ тааллуқ дорад?

§12. ФОРМУЛАҲОИ МУВОФИҚОВАРӢ

Формулаҳои мувофиқоварӣ гуфта, формулаҳоеро меноманд, ки дар онҳо функсияҳои тригонометрӣ аз аргументҳои

$$-\alpha; \quad \frac{\pi}{2} \pm \alpha; \quad \pi \pm \alpha; \quad \frac{3}{2}\pi \pm \alpha; \quad 2\pi \pm \alpha$$

ба воситаи функсияи аргументи α ифода карда мешаванд, ки дар ин ҷо α қимати дилхоҳи (имконпазири) аргумент мебошад.

Аввал формулаҳои мувофиқоварии синус ва косинусро ҳосил мекунем. Иббот мекунем, ки барои α -и дилхоҳ

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha \quad \text{ва} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha \quad \text{аст.} \quad (1)$$

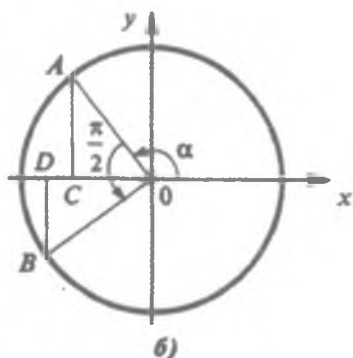
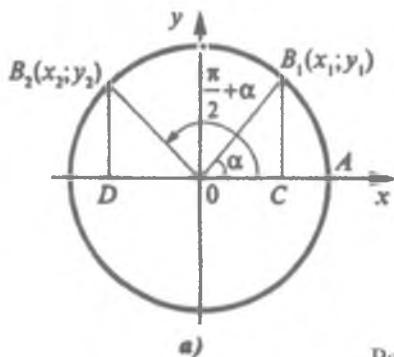
Радиуси OA -ро, ки дарозиаш ба R баробар аст, ба кунчи α ва ба k кучи $\frac{\pi}{2} + \alpha$ гардиш медихем. Дар ин ҳолат радиуси OA мувофиқан ба радиусҳои OB_1 ва OB_2 бадал мешавад (расми 114, а). Аз нуқтаҳои B_1 ва B_2 ба тири Ox перпендикулярҳои B_1C ва B_2D -ро мегузаронем:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = B_2D; \quad \cos \alpha = OC.$$

Секунҷаҳои OB_1C ва OB_2D баробаранд; бинобар ин $B_2D = OC$.

Аз ин ҷо $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$, агар кунчи α дар чоряки II тамом шуда бошад, он гоҳ кунчи $\frac{\pi}{2} + \alpha$ бояд дар чоряки III тамом шавад (расми 114, б)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -B_2D; \quad \cos \alpha = -OC.$$



Расми 114

Секунҷаҳои OAC ва BOD баробаранд, бинобар ин $BD=AC$. Пас,
 $-BD=OC$ ё $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha = OC$.

Аз айнияти исботшудаи (1) як қатор айниятҳои асосӣ ҳосил мешавад. Дар ифодаи (1) α - ро ба $-\alpha$ иваз карда, ҳосил мекунем:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha \quad (2)$$

Барои $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ ҳосил кардани чунин формула дар ифодаи (2) α -ро бо $\frac{\pi}{2} - \alpha$ иваз мекунем. Дар натиҷа ҳосил мекунем:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \text{ ёки } \sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Аз ифодаҳои (2) ва (3) ҳосил мешавад:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

$$\text{Ҳамин тавр, } \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Ҳамаи формулаҳои мувофиқоварино дар ҷадвал менависем. Аз ҷадвал қонуният, ки барои формулаҳои мувофиқоварӣ ҷой дорад, намоён аст. Ин қонуният имконият медиҳад, ки қоидае баён карда шаваду бо ёрии он формулаи дилхоҳи мувофиқоварӣ бе ёрии ҷадвалҳо навишта шавад.

Агар кунҷи α кунҷи ҷорӣ I бошад, аломати функсияи қисми рости баробарӣ бо аломати функсияи аввала якхела мешавад; барои кунҷҳои $\pi \pm \alpha$ ва $2\pi \pm \alpha$ номи функсияи аввала нигоҳ дошта мешавад; барои кунҷи $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ ва $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ номи функсияи аввала иваз мешавад (синус ба косинус, косинус ба синус, тангенс ба котангенс, котангенс ба тангенс).

М и с о л и 1. $\cos(90^\circ + \alpha)$ - ро ба воситаи функсияҳои кунҷи α ифода мекунем.

$$\text{Ҳ а л. } \cos(90^\circ + \alpha) = \cos[90^\circ - (-\alpha)] = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

М и с о л и 2. $\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)$ - ро ба воситаи функсияҳои тригонометрии кунҷи α ифода мекунем.

$$\text{Ҳ а л. } \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}[90^\circ - (-\alpha)] = \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Функция Аргумент Радіанхо (градусхо)		cos	sin	tg	ctg	
1	$-\alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	
2	$\frac{\pi}{2} + \alpha (90^\circ + \alpha)$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	
3	$\frac{\pi}{2} - \alpha (90^\circ - \alpha)$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	
4	$\pi + \alpha (180^\circ + \alpha)$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	
5	$\pi - \alpha (180^\circ - \alpha)$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	
6	$\frac{3}{2}\pi + \alpha (270^\circ + \alpha)$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	
7	$\frac{3}{2}\pi - \alpha (270^\circ - \alpha)$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	
8	$2\pi + \alpha (360^\circ + \alpha)$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	
9	$2\pi - \alpha (360^\circ - \alpha)$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	

?

1. Формулаҳоеро нависед, ки онҳо алоқамандии байни синус ва косинуси як кунҷро ифода намоянд. Онҳоро исбот кунед.
2. Формулаҳоеро нависед, ки онҳо тангенс ва котангенсро ба воситаи синус ва косинус ифода менамоянд. Онҳоро исбот кунед.
3. Формулаҳои мувофиқоварино барои кунҷҳои $\frac{\pi}{2} + \alpha$ ва $\pi - \alpha$ нависед.

653. Бо функсияи тригонометрии кунҷи α иваз намоед:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; в) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; е) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;
 б) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; д) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; ё) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

654. Ба намуи функсияи тригонометрии кунҷи α оред:

а) $\cos(90^\circ - \alpha)$; в) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$; г) $\cos(90^\circ + \alpha)$; е) $\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)$;
 б) $\sin(90^\circ - \alpha)$; г) $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$; д) $\sin(90^\circ + \alpha)$; ё) $\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha)$.

655. Қимати функсияҳои зеринро ёбед:

а) $\sin 240^\circ$; б) $\cos(-210^\circ)$; в) $\operatorname{tg} 300^\circ$.

656. Функсияҳои тригонометрии додашударо ба функсияҳои тригонометрии аргументи мусбати аз 45° хурд оред:

а) $\sin 146^\circ$, $\cos 132^\circ$, $\operatorname{tg} 174^\circ$, $\operatorname{ctg} 164^\circ$;
 б) $\sin 665^\circ$, $\cos 208^\circ$, $\operatorname{tg} 350^\circ$, $\operatorname{ctg} 365^\circ$;
 в) $\sin(-343^\circ)$, $\cos(-454^\circ)$, $\operatorname{tg}(-312^\circ)$, $\operatorname{ctg}(-275^\circ)$;
 г) $\sin(-1364^\circ)$, $\cos(-10742^\circ)$, $\operatorname{tg}(-5600^\circ)$, $\operatorname{ctg}(-3000^\circ)$.

657. Ифодаҳоро табдил диҳед:

а) $\frac{\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) \cos(180^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha) \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)}$;
 б) $\sin^2(26^\circ + \alpha) + \sin^2(244^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}(113^\circ + \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(67^\circ - \alpha)$.

658. Ифодаҳоро сода кунед:

а) $\cos(\alpha - 90^\circ) + \sin(\alpha - 180^\circ) + \operatorname{tg}^2(180^\circ - \alpha) + \operatorname{ctg}^2(\alpha - 180^\circ)$;
 б) $\sin^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$;
 в) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^4 \alpha$; д) $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 - (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2$;
 г) $\frac{\cos \Delta \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\sin^2 \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos \alpha$; е) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

659. Ифодаҳоро табдил диҳед:

а) $\operatorname{ctg} 3\frac{\pi}{2} + \alpha \cdot \operatorname{ctg}(7\pi - \alpha) \sin(3\pi - \alpha)$;

$$\text{б)} \frac{\cos(-\alpha)\cos(180^\circ+\alpha)}{\sin(-\alpha)\sin(90^\circ+\alpha)};$$

$$\text{в)} \frac{\sin^2(\pi+\alpha)\cos(2\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cos(\pi-\alpha)};$$

660. Исробот кунед, ки:

$$\text{а)} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right); \quad \text{в)} \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}(45^\circ + \alpha);$$

$$\text{б)} \cos(45^\circ + \alpha) = \sin(45^\circ - \alpha).$$

661. Ифодаҳоро сода кунед:

$$\text{а)} \cos^2(\pi + x) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right);$$

$$\text{б)} \sin(\pi + x) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos(2\pi - x) \sin\left(3\frac{\pi}{2} - x\right);$$

$$\text{в)} \frac{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}; \quad \text{г)} \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{ctg}^2(2\pi - \alpha) - 1}{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha - \pi)} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2(2\pi - \alpha) - 1}{\operatorname{ctg}(\pi + \alpha)};$$

$$\text{г)} \operatorname{tg}^2(\alpha - 360^\circ) \sin^2(\alpha - 270^\circ) + \cos^2(360^\circ + \alpha).$$

Машиқҳо барои такрор

662. Методи фосилаҳоро истифода бурда, нобаробариҳоро ҳал кунед:

$$\text{а)} (x+8)(x-5) > 0; \quad \text{б)} (x-14)(x+10) < 0.$$

663. Ҳисоб кунед:

$$\text{а)} (-3^{-3})^2 \cdot 27^3; \quad \text{б)} \left(2\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{8}{15} - \frac{5}{9}.$$

664. Системаҳоро ҳал кунед:

$$\text{а)} \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} x + 2y = 10, \\ x - 3y = 5. \end{cases}$$

665. Гунҷойиши зарф 60 л буда, он бо кислота пур карда шудааст. Аз зарф миқдори муайяни кислотаро рехта, онро бо об пур карданд. Баъд, аз зарф боз ҳамон қадар маҳлул рехтанд. Дар маҳлули боқимондаи зарф 15 л кислота монд. Бори якум аз зарф чанд литр кислота рехтанд?

666. Барои аз майдони додашуда гундоштани ҳосил ба бригадаи якум 12 рӯз ва ба бригадаи дуюм 75%-и ин вақт лозим аст. Баъд аз он ки бригадаи якум 5 рӯз кор кард, ба он бригадаи дуюм ҳамроҳ шуда, корро якҷоя тамом карданд. Бригадаҳо якҷоя чанд рӯз кор карданд?

Боби V. Дараҷаи нишондиҳандааш ратсионалӣ

§13. ДАРАҶАИ НИШОНДИҲАНДААШ РАТСИОНАЛӢ

34. Решаи дараҷаи n -ум ва хосиятҳои он

Решаи квадратӣ аз адади a ададест, ки квадраташ ба a баробар аст. Решаи дараҷаи n -ум аз адади a , ки дар ин ҷо n -адади натуралии дилхоҳи аз 1 калон мебошад, айнан ҳамин тавр муайян карда мешавад.

Таърифи 1. Решаи дараҷаи n -ум аз адади a гуфта, ададе-ро меноманд, ки дараҷаи n -уми он ба a баробар аст.

Мисоли 1. Решаи дараҷаи сеюм аз адади 125 ба 5 баробар аст, чунки $5^3=125$. Ададҳои 2 ва -2 решаҳои дараҷаи шашум аз адади 64 мебошанд, чунки $2^6=64$ ва $(-2)^6=64$ аст.

Мувофиқи ин таъриф решаи дараҷаи n -ум аз адади a аз ҳалли дилхоҳи муодилаи $x^n=a$ иборат аст. Функцияи $y=x^n$ -ро дида мебароем. Маълум аст, ки дар фосилаи $[0; \infty)$ ин функция дар қимати дилхоҳи n меафзояд ва тамоми қиматҳоро аз фосилаи $[0; \infty)$ қабул мекунад.

Аз тасдиқоти маълуми зерин истифода мебарем: бигзор функцияи f дар фосилаи I афзуншаванда (камшаванда) ва a қимати дилхоҳи он дар ин фосила бошад. Он гоҳ, муодилаи $f(x)=a$ дар f решаи ягона дорад. Мувофиқи ин тасдиқот муодилаи $x^n=a$ барои ҳар гуна $a \in [0; \infty)$ решаи гайриманфӣ дорад ва ин реша ягона аст. Решаро решаи арифметикии дараҷаи n -ум аз адади a меноманд ва ба намуди $\sqrt[n]{a}$ ишорат мекунанд. Адади n -ро нишондиҳандаи реша, худ адади a -ро ифодаи тахтирешагӣ меноманд.

Таърифи 2. Решаи арифметикии дараҷаи n -ум аз адади a гуфта, адади гайриманфиро меноманд, ки дараҷаи n -уми он ба a баробар аст.

Мисоли 2. Решаҳои арифметикии $\sqrt[3]{27}$ ва $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$ -ро меёбем.

Ҳал. а) $\sqrt[3]{27}=3$, чунки $3^3=27$ ва $3>0$ аст; б) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\frac{3}{2}$, чунки

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16} \text{ ва } \frac{3}{2} > 0 \text{ аст.}$$

Барои қиматҳои чуфти n функцияи $y=x^n$ чуфт аст. Аз ин ҷо бармеояд, ки агар $a>0$ бошад, муодилаи $x^n=a$ гайр аз решаи $x_1=\sqrt[n]{a}$ боз решаи $x_1=-\sqrt[n]{a}$ дорад. Агар $a=0$ бошад, реша ягона аст: $x=0$; агар $a<0$ бошад, ин муодила реша надорад, чунки нишондиҳандаҳои чуфти дараҷаҳои ҳар гуна адад адади гайриманфӣ аст.

Инак, ҳангоми чуфт будани n ду решаи дараҷаи n -ум аз адади дилхоҳи мусбати a вучуд дорад; решаи дараҷаи n -ум аз адади 0 ба нул баробар аст; решаи дараҷаи чуфт аз ададҳои манфӣ вучуд надорад.

Мисоли 3. Муодилаи $x^4=81$ ду реша дорад: ададҳои 3 ва -3 . Хулоса, ду решаи дараҷаи чорум аз 81 мавҷуданд. Дар айни ҳол $\sqrt[4]{81}$ адади гайриманфӣ аст, яъне $\sqrt[4]{81}=3$.

Барои қиматҳои токи n функсияи $y=x^n$ дар тамоми хати рости ададӣ меафзояд, соҳаи муайянии он маҷмӯи тамоми ададҳои ҳақиқӣ мебошад. Дар асоси тасдиқоти болоӣ меёбем, ки муодилаи $x^n=a$ барои қиматҳои дилхоҳи a , аз ҷумла ҳангоми $a<0$ будан низ, расо як реша дорад. Ин решаро барои қимати дилхоҳи a (аз он ҷумла дар қимати манфии a низ) бо $\sqrt[n]{a}$ ишорат мекунанд.

Инак, ҳангоми тоқ будани n -решаи дараҷаи n -ум аз адади дилхоҳи a вучуд дорад ва ягона аст. Барои решаҳои дараҷаи тоқ баробарии $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$ дуруст аст. Ҳақиқатан $(-\sqrt[n]{a})^n = (-1)^n \cdot (\sqrt[n]{a})^n = -1 \cdot a = -a$, яъне адади $-\sqrt[n]{a}$ решаи дараҷаи n -ум аз $-a$ мебошад. Вале чунин реша барои қимати токи n ягона, яъне $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$ аст. Баробарии (ҳангоми тоқ будани n) имконият медиҳад, ки решаи дараҷаи тоқро аз адади манфӣ ба воситаи решаи арифметикии ҳуди ҳамон дараҷа ифода намоем. Масалан, $\sqrt[5]{-25} = -\sqrt[5]{25}$; $\sqrt[3]{-125} = -\sqrt[3]{125} = -5$.

Барои x -и дилхоҳ $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x|, & \text{агар } n \text{ чуфт бошад,} \\ x, & \text{агар } n \text{ тоқ бошад.} \end{cases}$

Чунон ки мо, аллакай, медонем, решаи дараҷаи дувӣ адад-ро решаи квадратӣ меноманд ва нишондиҳандаи решаи 2-ро наменависанд (масалан, решаи квадратӣ аз 5 чун $\sqrt{5}$ навишта мешавад). Решаи дараҷаи сеюмро решаи кубӣ меноманд.

Мисоли 4. Муодилаҳои $x^5=-13$ ва $x^8=9$ -ро ҳал мекунем. Ҳал. Мувофиқи таърифи решаи дараҷаи n -ум адади x решаи дараҷаи панҷум аз -13 мебошад. Нишондиҳандаи реша адади токи 5 мебошад, бинобар ин чунин реша вучуд дорад ва ягона аст: $\sqrt[5]{-13} = -\sqrt[5]{13}$. Ҷавобашро ин тавр наменависанд: $x = -\sqrt[5]{13}$.

Мувофиқи таърифи решаи дараҷаи n -ум ҳалли муодилаи $x^8=9$ адади $\sqrt[8]{9}$, мебошад. Азбаски 8 адади чуфт аст, $-\sqrt[8]{9}$ низ ҳалли ин муодила мебошад. Инак, $x_1=\sqrt[8]{9}$, $x_2=-\sqrt[8]{9}$. Ҷавоб: $x = \pm\sqrt[8]{9}$.

Хосиятҳои асосии решаҳои арифметикии дараҷаи n -умро баён мекунем.

Барои ҳар гуна ададҳои натуралии n ва k , ки аз 1 калонанд ва ҳар гуна ададҳои ғайриманфии a ва b баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$1^0 \cdot \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad 2^0 \cdot \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} (b \neq 0); \quad 3^0 \cdot \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a};$$

$$4^0 \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}; \quad 5^0 \cdot \sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k.$$

Хосияти 1⁰-ро исбот мекунем. Мувофиқи таъриф $\sqrt[n]{ab}$ адади ғайриманфист, ки дараҷаи n -уми он ба ab баробар аст. Адади $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ ғайриманфӣ аст. Бинобар ин, $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = a \cdot b$ —ро санҷидан кофист, ки он аз хосиятҳои дараҷаи нишондиҳандааш натуралӣ ва таърифи решаи дараҷаи n -ум бармеояд:

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab.$$

Се хосияти зерин ба монанди 1⁰ исбот карда мешавад:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \geq 0 \text{ ва } \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}; \quad \sqrt[n]{a} \geq 0 \text{ ва } (\sqrt[n]{a})^{nk} = ((\sqrt[n]{a})^n)^k = a^k;$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} \geq 0 \text{ ва } (\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^{nk} = \left(\sqrt[n]{(\sqrt[k]{a})^n}\right)^k = (\sqrt[k]{a})^k = a.$$

Акнун хосияти 5⁰-ро исбот мекунем. Барои ин нишон медиҳем, ки дараҷаи n -уми адади $(\sqrt[n]{a})^k$ ба a^k баробар аст:

$$((\sqrt[n]{a})^k)^n = (\sqrt[n]{a})^{kn} = ((\sqrt[n]{a})^n)^k = a^k.$$

Мисоли 5. Ифодаҳоро табдил медиҳем:

$$\text{а) } \sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}; \quad \text{в) } \sqrt[4]{5\frac{1}{16}}; \quad \text{г) } \sqrt[21]{128}; \quad \text{д) } \sqrt[7]{128^3};$$

$$\text{Ҳал. а) } \sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{32} = 2; \quad (\text{хосияти } 1^0) \quad \text{б) } \sqrt[4]{5\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{3}{2};$$

$$(\text{хосияти } 2^0) \quad \text{в) } \sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[15]{7} \quad (\text{хосияти } 3^0) \quad \text{г) } \sqrt[21]{128} = \sqrt[21]{2^7} = \sqrt[3]{2}$$

$$(\text{хосияти } 4^0) \quad \text{д) } \sqrt[7]{128^3} = (\sqrt[7]{128})^3 = 2^3 = 8.$$

6⁰. Барои ададҳои дилхоҳи a ва b , ки шарт $0 < a < b$ -ро қонеъ менамоянд, баробарии $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ ҷой дорад.

Исбот. Баръакс, фарз мекунем, ки $\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{b}$ аст. Он гоҳ, мувофиқи хосияти дараҷаҳои нишондиҳандашон натуралӣ

$(\sqrt[n]{a})^n \geq (\sqrt[n]{b})^n$, яъне $a \geq b$ мешавад. Ин ба шарти $a < b$ муҳолиф аст.

Мисоли 6. Ададҳои $\sqrt[3]{2}$ ва $\sqrt[5]{3}$ -ро муқоиса мекунем.

Ҳал. $\sqrt[3]{2}$ ва $\sqrt[5]{3}$ -ро ба намуди решаҳои нишондиҳандашон якхела ифода мекунем: $\sqrt[3]{2} = \sqrt[15]{2^5} = \sqrt[15]{32}$ ва $\sqrt[5]{3} = \sqrt[15]{3^3} = \sqrt[15]{27}$.
Аз нобаробарии $32 > 27$ ва ҳосияти $6^\circ \sqrt[3]{2} > \sqrt[5]{3}$ бармеояд.

Мисоли 7. Нобаробарии $x^6 > 20$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. Ин нобаробарӣ ба нобаробарии $x^6 - 20 > 0$ баробарқувва аст. Аз методи фосолаҳо истифода мебарем. Муодилаи $x^6 - 20 = 0$ ду реша дорад: $\sqrt[6]{20}$ ва $-\sqrt[6]{20}$. Ин ададҳо хати ростро ба се фосола ҷудо мекунанд. Азбаски ҳангоми $x=0$ будан, $x^6 - 20 < 0$ аст, пас фосолаи $(-\sqrt[6]{20}, \sqrt[6]{20})$ ҳалли нобаробарӣ нест.

Ҷавоб: $(-\infty; -\sqrt[6]{20}) \cup (\sqrt[6]{20}; \infty)$

?

Таърифи решаи дараҷаи n -умро диҳед. 2. Решаи арифметикӣ дараҷаи n - ум гуфта чиро мефҳанд? 3. Ҳосиятҳои асосии решаи арифметикиро баён кунед.

667. Ҳаққонӣ будани баробарии зеринро санҷед:

а) $\sqrt[4]{16} = 2$; б) $\sqrt[3]{-1} = -1$; в) $\sqrt[4]{625} = 5$; г) $\sqrt[17]{1} = 1$; ғ) $\sqrt[19]{0} = 0$; д) $\sqrt[5]{-243} = -3$.

668. Ҳисоб кунед:

а) $\sqrt[3]{27}$; б) $\sqrt[5]{-32}$; в) $\sqrt[4]{81}$; г) $\sqrt[3]{64}$; ғ) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$.

669. Сода кунед:

а) $(-\sqrt[4]{11})^4$; б) $(\sqrt[3]{7})^3$; в) $(3\sqrt[5]{-3})^5$; г) $\sqrt[7]{-3^7}$; ғ) $7\sqrt[8]{(-3)^8}$.

670. Ҳисоб кунед:

а) $\sqrt[3]{24 \cdot 9}$; б) $\sqrt[4]{48 \cdot 27}$; в) $\sqrt[5]{160 \cdot 625}$; г) $\sqrt[3]{75 \cdot 45}$; ғ) $\sqrt[5]{27} \cdot \sqrt[5]{9}$.

671. Ададҳоро муқоиса кунед:

а) $\sqrt[3]{7}$ ва $\sqrt[6]{40}$; б) $\sqrt{5}$ ва $\sqrt[9]{500}$; в) $\sqrt[3]{4}$ ва $\sqrt[10]{87}$.

672. Муодиларо ҳал кунед:

а) $x^3 = 4$; б) $x^3 + 4 = 0$; в) $x^4 = 10$; г) $x^6 = 5$; ғ) $x^5 = 3$.

673. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $x^3 < 5$; б) $x^4 < 3$; в) $x^7 \geq 11$; г) $x^{10} > 2$; ғ) $x^6 > 2$.

Машқҳо барои такрор

674. Сода кунед:

а) $2^2 \cdot 4^2 \cdot 8^2 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^2$; б) $5^3 \cdot 15^3 \cdot 25^3 \cdot \left(\frac{1}{125}\right)^3$; в) $(49)^4 \cdot \left(-\frac{1}{343}\right)^4 \cdot 21^4$.

675. Ҳалли системаро ҳамчун функсияи параметри a ёбед:

$$\text{а) } \begin{cases} 5ax - y = 8, \\ -ax + y = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 8x + 2ay = 1, \\ 5x + 4ay = 2. \end{cases}$$

35. Дарачаи нишондиҳандааш ратсионалӣ ва ҳосиятҳои он

Ҳосиятҳои дарачаи адади нишондиҳандааш бутунро хотиррасон мекунем.

Барои ададҳои дилхоҳи a ва b ададҳои бутуни ихтиёрии m ва n баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, a^m : a^n = a^{m-n} (a \neq 0), (a^m)^n = a^{mn},$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n, \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} (b \neq 0), a^1 = a, a^0 = 1 (a \neq 0)$$

Агар $m > n$ бошад, ҳангоми $a > 1$ будан, $a^m > a^n$ ва ҳангоми $0 < a < 1$ будан, $a^m < a^n$ аст.

Дар ин банд ба ифодаҳои намуди $2^{0.3}$, $8^{\frac{5}{7}}$, $4^{-\frac{1}{2}}$ ва ғайра маъно бахшида, мафҳуми дарачаи ададро ҳангоми адади дилхоҳи ратсионалӣ будани он муайян менамоем.

Бигзор, $r = \frac{m}{n}$ адади ратсионалӣ, яъне m адади бутун ва n адади натуралӣ бошад. Қимати ифодаи $a^r = a^{\frac{m}{n}}$ -ро ҳамчун ададе, ки дарачаи n -уми он ба a^m баробар аст, яъне $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$ аст, муайян мекунем. Мувофиқи таърифи решаи дарачаи n -ум ин чунин маъно дорад, ки адади a решаи дарачаи n -ум аз адади a^m мебошад. Хулоса, таърифи зерин ҷой дорад.

Таъриф. Дарачаи адади $a > 0$ -и нишондиҳандааш ратсионали $r = \frac{m}{n}$ гуфта, адади $\sqrt[n]{a^m}$ -ро меноманд, ки ин ҷо m -адади бутун ва n -адади натуралӣ ($n > 1$) аст.

Инак, мувофиқи таъриф $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Дарачаи адади 0 фақат барои нишондиҳандаҳои мусбат муайян карда шудаанд, мувофиқи таъриф барои $r > 0$ -и дилхоҳ $0^r = 0$ аст.

Мисоли 1. Мувофиқи таърифи дарачаи нишондиҳандааш касри: $7^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{7^4}$; $2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$; $a^{-\frac{7}{15}} = \sqrt[15]{a^{-7}}$.

Мисоли 2. Қимати ифодаҳои ададии $8^{\frac{1}{3}}$, $81^{\frac{3}{4}}$, $128^{\frac{2}{7}}$ -ро меёбем.

Ҳал. Аз таърифи дарачаи нишондиҳандааш касрӣ ва ҳосиятҳои решаҳо истифода намуда, ҳосил мекунем:

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}, \quad 8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2; \quad 81^{\frac{3}{4}} = (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^3 = 27;$$

$$128^{-\frac{2}{7}} = (\sqrt[7]{128})^{-2} = (\sqrt[7]{2^7})^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}.$$

Аз таърифи дараҷаи нишондиҳандааш ратсионалӣ бармеояд, ки барои адади мусбати дилхоҳи a ва адади ратсионалии дилхоҳи r адади a^r мусбат аст.

Адади ратсионалии дилхоҳро ба намуди каср бо тарзҳои гуногун навиштан мумкин аст, чунки барои ададҳои натуралии дилхоҳи k баробарии $\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}$ ҷой дорад. Қимати a^r низ ба шакли навишти адади ратсионалии r вобаста нест. Ҳақиқатан, аз хосиятҳои решаҳо бармеояд, ки

$$a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = (\sqrt[nk]{a^m})^k = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Ҳангоми $a < 0$ будан a^r муайян карда намешавад. Инро дар мисоли зерин нишон медиҳем. Бигзор $(-8)^{\frac{1}{3}}$ дода шуда бошад.

Маълум аст, ки он ба $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -\sqrt[3]{2^3} = -2$ баробар мешавад.

Вале, агар ба ҷойи $\frac{1}{3}$ касри ба он баробари $\frac{2}{6}$ - ро гузорем $-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$ ба мухолифат омада мерасем.

Барои ададҳои ратсионалии дилхоҳи r, s ва ададҳои мусбати дилхоҳи a ва b баробариҳои зерин ҳаққонианд:

$$1^0. a^r \cdot a^s = a^{r+s}; \quad 2^0. a^r : a^s = a^{r-s}; \quad 3^0. (a^r)^s = a^{rs};$$

$$4^0. (ab)^r = a^r b^r; \quad 5^0. \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}.$$

Хосиятҳои $1^0, 3^0$ ва 4^0 -ро исбот мекунем. Дурустии хосияти 2^0 бевосита аз 1^0 бармеояд, чунки $a^r = a^{r-s+s} = a^{r-s} \cdot a^s$. Пас, $a^r : a^s = \frac{a^r}{a^s} = \frac{a^{r-s} \cdot a^s}{a^s} = a^{r-s}$. Бигзор, $r = \frac{m}{n}$ ва $S = \frac{p}{q}$ бошад, ки ин ҷо n ва q ададҳои натуралӣ, m ва p ададҳои бутунанд.

$$a^r \cdot a^s = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{r+s}$$

$$(a^r)^s = \sqrt[q]{(a^r)^p} = \sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{rs}.$$

$$(ab)^r = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^r \cdot b^r.$$

Мисоли 3. Қимати ифодаи $(\sqrt[4]{40} \cdot 2^{\frac{1}{4}}) : 5^{-\frac{3}{4}}$ -ро меёбем.

$$\text{Ҳал. } (\sqrt[4]{40} \cdot 2^{\frac{1}{4}}) : 5^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3 \cdot 5} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[4]{5} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} =$$

$$= \sqrt[4]{2^3} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[4]{5} \cdot 5^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3+1}{4}} \cdot 5^{\frac{1+3}{4}} = 10$$

Мисоли 4. Ифодаро табдил медиҳем:

$$\text{а) } \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}}; \quad \text{б) } \frac{a^{1,2} - b^{2,3}}{a^{0,8} + a^{0,4} \cdot b^{0,7} + b^{1,4}}$$

$$\text{а) } \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = \frac{(a^{\frac{1}{4}})^2 - (b^{\frac{1}{4}})^2}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = \frac{(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \frac{a^{1,2} - b^{2,3}}{a^{0,8} + a^{0,4} \cdot b^{0,7} + b^{1,4}} &= \frac{(a^{0,4})^3 - (b^{0,7})^3}{(a^{0,4})^2 + a^{0,4} \cdot b^{0,7} + (b^{0,7})^2} = \\ &= \frac{[a^{0,4} - b^{0,7}][(a^{0,4})^2 + a^{0,4} \cdot b^{0,7} + (b^{0,7})^2]}{(a^{0,4})^2 + a^{0,4} \cdot b^{0,7} + (b^{0,7})^2} = a^{0,4} \cdot b^{0,7} \end{aligned}$$

6⁰. Бигзор, r -адади ратсионалӣ ва $0 < a < b$. Он гоҳ, ҳангоми $r > 0$ будан, $a^r < b^r$ аст, ҳангоми $r < 0$ будан, $a^r > b^r$ мешавад.

7⁰. Барои ададҳои ратсионалии дилхоҳи r ва s аз нобаробарии $r > s$ бармеояд, ки ҳангоми $a > 1$ будан, $a^r > a^s$ аст, ҳангоми $0 < a < 1$ будан, $a^r < a^s$ аст.

Мисоли 5. Ададҳои $\sqrt[5]{8}$ ва $2^{\frac{2}{3}}$ -ро муқоиса мекунем. $\sqrt[5]{8}$ -ро ба намуди дараҷаи нишондиҳандааш ратсионалӣ менависем:

$\sqrt[5]{8} = 2^{\frac{2}{5}}$. Аз рӯйи ҳосияти 7⁰ $2^{\frac{2}{3}} > 2^{\frac{2}{5}}$ -ро ҳосил мекунем, чунки $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$ аст. Инак, $2^{\frac{2}{3}} > \sqrt[5]{8}$ мешавад.

Мисоли 6. Ададҳои 2^{300} ва 3^{200} -ро муқоиса мекунем:

Ин ададҳоро ба намуди дараҷаҳои нишондиҳандаашон баробар менависем:

$2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$; $3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$. Азбаски $8 < 9$ аст, пас аз рӯйи ҳосияти 6⁰ ҳосил мекунем: $8^{100} < 9^{100}$, яъне $2^{300} < 3^{200}$.

?

1. Дараҷаи адади нишондиҳандааш ратсионалиро таъриф диҳед. 2. Ҳосиятҳои дараҷаи адади нишондиҳандааш бутунро номбар кунед. 3. Ҳосиятҳои дараҷаи адади нишондиҳандааш ратсионалиро баён кунед.

676. Ифодаро ба намуди дараҷаи нишондиҳандааш ратсионалӣ нависед:

а) $\sqrt{11}$; б) $\sqrt[3]{5^5}$; в) $\sqrt[7]{3^{17}}$; г) $\sqrt[3]{5^2}$; ғ) $\sqrt[3]{7^{-11}}$; д) $\sqrt[5]{2^{-15}}$.

677. Ифодаро ба намуди реша аз адад нависед:

а) $7^{\frac{4}{7}}$; б) $4^{1,25}$; в) $3 \cdot 2^{-\frac{3}{5}}$; г) $2 \cdot 8^{\frac{2}{11}}$; ғ) $a^{\frac{3}{8}}$; д) $2b^{-\frac{2}{3}}$; е) $b^{\frac{1}{3}} \cdot c^{\frac{2}{7}}$.

678. Қимати ифодаи адади ро ёбед:

а) $16^{\frac{5}{4}}$; б) $243^{0,4}$; в) $8^{\frac{3}{5}} \cdot 81^{0,25}$; г) $8^{\frac{1}{2}} \cdot (8^{\frac{1}{6}} \cdot 9^{\frac{3}{2}})$; ғ) $(\frac{27^2}{125^6})^{\frac{2}{9}}$.

679. Кадоме аз ададҳои зерин калон аст:

а) $\sqrt[7]{3^3}$ ё $3^{\frac{19}{43}}$; б) $(\frac{1}{2})^{\frac{5}{3}}$ ё $\sqrt[7]{\frac{1}{32}}$; в) $(\frac{1}{2})^{-\frac{5}{7}}$ ё $\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{3}{14}}$.

680. Ифодаро сода кунед:

а) $\frac{a-b}{a^{0,5}+b^{0,5}}$; б) $\frac{x^2-4}{x-16}$; в) $\frac{a+b}{a^3+b^3-a^3b^3}$; г) $\frac{z-8}{z^8+2z^3+z}$.

Машқҳо барои такрор

681. Муодиларо ҳал кунед:

а) $\frac{x}{x-3} = \frac{3}{x-3}$; б) $\frac{a}{x-2} = \frac{x+1}{x^2-4}$; в) $\frac{2}{x-3} = \frac{x+5}{x^2-9}$.

682. Коргар кореро дар 12,5 соат иҷро карда метавонад, аммо рафики ӯ 0,03 қисми ин корро дар 1,5 соат иҷро мекунад. Ҳамаи корро ҳар дуи онҳо якҷоя дар чанд вақт иҷро карда метавонанд?

МАЪЛУМОТИ ТАЪРИХӢ

Истилоҳи «тригонометрия» аз калимаи юнонии «тригон»-секунҷа ва «метрия»-чен мекунам, пайдо шудааст ва дар якҷоягӣ маънои «чен кардани секунҷа»-ро дорад.

Дар инкишофи тригонометрия математикҳои Ҳиндустон дар асрҳои V-XII ҳиссаи муҳим гузоштаанд. Ба онҳо муносибатҳои маълум буданд, ки бо ифодаҳои ҳозира чунин навишта мешаванд: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$

Теоремаи синусҳо аз тарафи математики ҳиндустонӣ Брахмагупта (598-660) нашр шудааст. Онро Насируддини Тусӣ (1201- 1274) исбот кардааст.

Назарияи тригонометрияро Чамшеди Кошонӣ (вафоташ с. 1430) ва Алоуддини Қушчӣ (1402-1474) дар асарҳои худ низ инкишоф додаанд. Масалан, Қушчӣ барои ҳисоб кардани элементҳои секунҷа аз теоремаи синусу косинусҳо истифода бурдааст.

Дар расадхонаи Улуғбек (Самарқанд) Кушчӣ усули хеле сахҳи тартиб додани ҷадвалҳои тригонометриро кор карда баромада буд. Ҷадвалҳои қиматҳои функсияҳои тригонометрӣ, ки аз тарафи олимони ин расадхона сохта шудаанд, чунон сахҳанд, ки онҳо аз ҷадвалҳои ҳозиразамон танҳо бо рақами нӯҳум пас аз вергул фарқ мекунанд.

Ба туфайли асарҳои риёзидонони Осиёи Миёна тригонометрия ба фанни мустақил табдил ёфт, ки дар он на танҳо масъалаҳои геометрия, балки муносибатҳои алгебравии байни функсияҳои тригонометрӣ низ пайваستا тадқиқ гардидаанд.

Далели равшани он тадқиқотҳои таърихшинос Браунмпол (1853-1908) шуда метавонад. Ӯ асарҳои доир ба риёзиёт навиштаи Баттонӣ, Абулвафои Бузачонӣ, Насируддини Тусӣ ва олимони мактаби илмии Улуғбек-Қозизодаи Румӣ, Ҷамшеди Қошонӣ ва Алоуддини Қушчиро ба фикри он ки, гуё олимони Осиёи Миёна дар фан ягон навигарие дохил накардаанд, муқобил баромада, хотиррасон мекунад, ки Насируддини Тусӣ 200 сол пештар аз олими аврупоӣ Региомонтан (1436-1476) мафҳуми тригонометриро пешниҳод карда, дар асари худ «Рисола оид ба ҷоратарафаи пурра» ба ҷоп мерасонад. Истилоҳи «синус»-ро бори аввал ҳиндуҳо дохил карданд. Онҳо нисфи хордaro, ки камонро дарбар мегирад, хати синус номида ба вай номи «ҷива» дода буданд. Дар асри IX риёзидонҳои Осиёи Миёна «ҷива»-и ҳиндуҳоро «ҷайб» тарҷума намуданд. Олимони Аврупои Ғарбӣ бошанд, ба калимаи охири «sinus» ном гузоштаанд. Эйлер баъди якҷанд аср аввалин шуда барои мухтасарӣ ба ҷойи «sinus» «sin»-ро қабул кард.

Дар асрҳои IX-XV математика дар Осиёи Миёна вобаста ба зарурияти ҳалли масъалаҳои амалии астрономия, ҷуғрофия ва геодезия тараққӣ мекард. Олимони Осиёи Миёна шаш хатти тригонометрии синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косекансро муҳокима карданд. Барои ҳалли масъалаи муайян кардани баландии Оғтоб астрономи араб Баттонӣ (852-929) ҷадвали на он қадар қалони қиматҳои котангенсро тартиб дода буд. Астроном ва математик Абулвафои Бузачонӣ бо калимаҳои муносибатҳои алгебравии байни функсияҳои тригонометриро ифода карда буд. Ӯ ҷадвали синусҳоро бо фосилаи 10 то сахҳии (1:60°) ва инчунин ҷадвали тангенсҳоро тартиб додааст. Бояд қайд кард, ки Абулвафои Бузачонӣ ва Баттониро асосгузори тригонометрия номидаанд. Ба хоҳири кашфиётҳои нучумияш ба яке аз танӯраҳои Моҳ номи Абулвафоро гузоштаанд.

Машқҳои иловагӣ ба бобҳои IV ва V *Ба параграфи 10*

683. Ифодаро сода кунед:

а) $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha + 2\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;

б) $\frac{\sin^2\alpha - 1}{\cos^2\alpha - 1} + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$; в) $\frac{\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha}$.

684. Айниятро исбот кунед.

$$\begin{aligned} \text{а) } \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha &= \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha; & \text{б) } \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha - 1} &= \operatorname{tg}^2 \alpha \\ \text{в) } (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos^2 \alpha &+ 1; & \text{г) } \frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} &= 1. \end{aligned}$$

685. Қимати синус ва косинуси α -ро ёбед, агар:

$$1) \alpha = 750^\circ; \quad 2) \alpha = 1260^\circ; \quad 3) \alpha = 810^\circ; \quad 4) \alpha = 390^\circ.$$

686. Чй гуна аломат доранд:

$$1) \sin 181^\circ; \quad 2) \cos 280^\circ; \quad 3) \operatorname{tg} 175^\circ; \quad 4) \operatorname{ctg} 358^\circ; \quad 5) \cos(-116^\circ).$$

687. Қимати ифодаро ёбед:

$$\begin{aligned} \text{а) } 5 \sin \frac{\pi}{2} + 4 \cos 0 - 3 \sin \frac{3\pi}{2} + \cos \pi; & \text{б) } \sin(-\pi) - \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + 2 \sin 2\pi - \operatorname{tg} \pi; \\ \text{в) } 3 - \sin \frac{2\pi}{3} + 2 \cos \frac{\pi}{2} - 5 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}; & \text{г) } 3 \sin \frac{2\pi}{2} - 4 \operatorname{tg} \frac{2\pi}{4} - 3 \cos \frac{2\pi}{6} + 3 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ба параграфи 11

688. Исбот кунед, ки ин баробариҳо айният мебошанд:

$$\begin{aligned} \text{а) } \operatorname{tg} \alpha - \sin^2 \alpha &= \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha; & \text{б) } \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} &= \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1} \\ \text{в) } \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha; & & \text{г) } \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} &= 1 \end{aligned}$$

689. Чунин қиматҳои α -ро муайян намоед, ки барояш ифодаҳои зерин маъно надоранд:

$$\text{а) } \frac{1 - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha}; \quad \text{б) } \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha; \quad \text{в) } \frac{\operatorname{ctg} \alpha - 1}{\operatorname{tg} \alpha - 1}; \quad \text{г) } \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

690. Ифодаро сода кунед:

$$\text{а) } \sqrt{\frac{2}{1 + \cos \alpha} + \frac{2}{1 - \cos \alpha}}; \quad \text{б) } 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$$

691. Ифодаро сода кунед:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha & \quad \text{в) } \frac{1}{\sin^2 \alpha} - \operatorname{ctg}^2 \alpha (1 + \sin^2 \alpha) \\ \text{б) } \sin^2 \beta + \cos^2 \beta - \frac{1}{\sin^2 \beta}; & \quad \text{г) } \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha (\cos^2 \alpha + 1). \end{aligned}$$

692. Айниятро исбот кунед:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{1}{\sin \alpha} \sin \alpha &= \cos \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha; & \text{в) } \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} &= \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}; \\ \text{б) } \frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} &= 1; & \text{г) } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha} &= \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

Ба параграфи 12

693. Ифодаро сода кунед:

а) $\sin(\alpha - 90^\circ)$; б) $\cos(\alpha - \pi)$; в) $\operatorname{tg}(\alpha - 270^\circ)$;

г) $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; р) $\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha)$.

694. Ифодаро сода кунед:

а) $\sin\alpha + \sin(90^\circ + \alpha) + \sin(180^\circ + \alpha) + \sin(270^\circ + \alpha) + \sin(360^\circ + \alpha)$;

б) $\cos(\alpha + 40^\circ) + \cos(\alpha + 130^\circ) + \cos(\alpha + 220^\circ) + \cos(\alpha + 310^\circ)$;

в) $\cos(90^\circ + \alpha) \cos(180^\circ + \alpha) [\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) + \operatorname{tg}(270^\circ + \alpha)]$;

г) $\sin 25^\circ \cos 65^\circ + \sin^2 115^\circ - \cos^2 245^\circ + \sin^2 295^\circ \cos^2 335^\circ$.

695. Кадомаш калон аст?

а) $\sin 26^\circ$ ё $\cos 40^\circ$; б) $\sin 51^\circ$ ё $\cos 22^\circ$.

696. Айниятро исбот кунед:

а) $\sin(45^\circ + \alpha) = \cos(45^\circ - \alpha)$; б) $\cos(45^\circ + \alpha) = \sin(45^\circ - \alpha)$;

в) $\cos(45^\circ + \alpha) \cos(45^\circ - \alpha) - \sin(45^\circ + \alpha) \sin(45^\circ - \alpha) = 0$;

г) $\sin 15^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}}{3}$; р) $0,5(\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha) = \sin(30^\circ + \alpha)$.

697. Ифодаро сода кунед.

а) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + 1} - \operatorname{ctg}(45^\circ + \alpha)$ б) $\frac{3 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}{3 \operatorname{tg}^2 15^\circ - 1}$; в) $\frac{\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) + \operatorname{tg} \alpha}$

Ба параграфи 13

698. Ҳисоб кунед.

а) $\sqrt[3]{3^{12}}$; б) $\sqrt[3]{-1}$; в) $\sqrt[8]{255^4}$; г) $\sqrt[3]{-\frac{1}{7}}$;

г) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{24}}$; д) $\sqrt[3]{-34^3}$; е) $\sqrt[4]{-8^7}$; ё) $\sqrt[3]{343 \cdot 0,125}$.

699. Аз ҳосиятҳои асосии реша истифода бурда ҳисоб кунед.

а) $(\sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[3]{112}) : \sqrt[3]{250}$; б) $(\sqrt[4]{54} \cdot \sqrt[4]{120}) : \sqrt[4]{5}$;

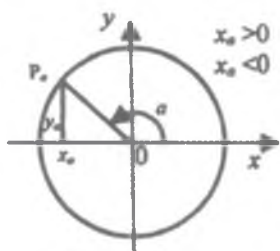
в) $\sqrt[3]{11 - \sqrt{57}} \cdot \sqrt[3]{11 + \sqrt{57}}$; г) $\sqrt[4]{14 - \sqrt{33}} \cdot \sqrt[4]{17 + \sqrt{33}}$.

700. Ифодаро сода кунед:

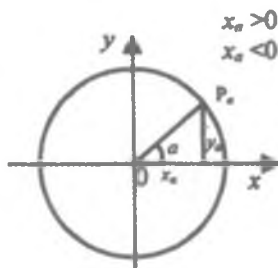
а) $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}$; б) $\frac{c - 2c^2 + 1}{\sqrt{c} - 1}$; в) $(a^4)^{-\frac{3}{4}} \cdot (b^{-\frac{2}{3}})^{-6}$.

ЦАВОБҲО.

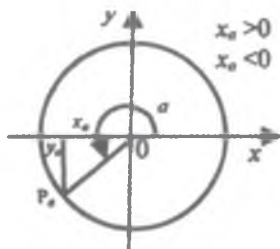
593. 0,5. 594. а) 2, -1; б) $-\frac{1}{2}$, 2; 595. $s=\frac{3}{2}$. 596. а) $\frac{\pi}{180}$; б) $\frac{\pi}{12}$; в) $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{7\pi}{18}$; д) $\frac{2\pi}{3}$; е) $\frac{5}{6}\pi$; ж) $\frac{16}{9}\pi$; з) $\frac{7}{4}\pi$; и) $\frac{50}{9}\pi$. 597. а) $120'30''$; б) $220'30''$; в) 120° . 598. а) Дар чоряки I; б) дар чоряки III; в) дар чоряки III. 599. а) $(a-b)$; б) 4; в) -2; г) ифодаи додашуда муайян нест, $\text{ctg}\pi$ вучуд надорад. 600. а) $\frac{7}{3}\sqrt{3}$; б) $6\sqrt{3}-2$; в) $-b$; г) $-(n+p)$. 601. а) 2,5; б) 1,2; в) 0; г) $3\sqrt{3}$; д) 6; е) 6. 602. а) $\alpha = \frac{\pi}{2}$; б) $\alpha = \frac{5\pi}{2}$; в) $\alpha = \frac{9\pi}{2}$; г) $\alpha = \frac{\pi}{2}$; д) $\alpha = \frac{3\pi}{2}$; е) $\alpha = \frac{5\pi}{2}$. 603. а) $\varphi = \frac{\pi}{6}$; б) $\varphi = 0$; в) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; г) $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, $\varphi = 2\pi$. 604. а) Расми 115; б) расми 116; в) расми 117; г) расми 118



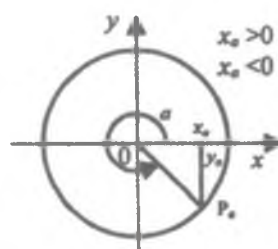
Расми 115



Расми 116



Расми 117



Расми 118

605. $\sin 67^\circ > 0$, $\cos 267^\circ < 0$, $\cos 375^\circ > 0$, $\sin(-68^\circ) < 0$, $\cos(-68^\circ) > 0$, $\sin 2^\circ > 0$ ҳосили зарб мусбат. 606. а) $\alpha = \frac{\pi}{2}(90^\circ)$; б) $\alpha = 3\frac{\pi}{2}(270^\circ)$; в) $\alpha = 0$; г) $\alpha = \pi(180^\circ)$; д) $2\pi(360^\circ)$. 607. а) Ҳа; б) не; в) ҳа; г) не. 608. а) Ҳа; б) ҳа; в) ҳа. 609. а) 1; б) $\sqrt{2}$; в) $1 - \sqrt{2}$; г) -1. 610. а) $\frac{7}{2}\sqrt{3}$; б) $6\sqrt{3}-2$; в) $-b$.

611. а) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) -1 . **612.** $\frac{52\alpha^3-8}{\alpha^9}$. **613.** а) 47,94; б) 1,68. **614.** (8;-6), (-6;8) **615.** -1 . **616.** а) $(-4;4)$; б) $(-\infty; \sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; \infty)$. **617.** $P=36\text{см}$; $S=80\text{см}^2$. **618.** 670. **619.** $\sin\alpha$ -мусбат; $\cos\alpha$ -мусбат; $\tg\alpha$ -мусбат; $\ctg\alpha$ -мусбат, б) $\sin\alpha$ -мусбат; $\cos\alpha$ -манфй; $\tg\alpha$ -манфй; $\ctg\alpha$ -манфй, в) $\sin\alpha$ -мусбат; $\cos\alpha$ -мусбат; $\tg\alpha$ -мусбат; $\ctg\alpha$ -мусбат; г) $\sin\alpha$ -манфй; $\cos\alpha$ -манфй; $\tg\alpha$ -мусбат; $\ctg\alpha$ -мусбат; д) $\sin\alpha$ -манфй; $\cos\alpha$ -мусбат; $\tg\alpha$ -манфй; $\ctg\alpha$ -манфй. **620.** а) $\sin 67^\circ > 0$; б) $\cos 267^\circ < 0$; в) $\cos 375^\circ > 0$, г) $\sin(-68^\circ) < 0$; д) $\cos(-68^\circ) > 0$. **621.** а) $\sin 325^\circ < 0$; б) $\cos 275^\circ > 0$; в) $\tg 420^\circ > 0$; г) $\ctg 420^\circ > 0$; д) $\sin 25^\circ > 0$. **622.** а) I; б) I; II; III; V, в) I; II. **623.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) 0; в) $\frac{1}{2}$; г) 0; д) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **624.** а) $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$. **625.** а) 5; б) $13\sqrt{3}$. **626.** а) $(-\infty; 0) \cup (3; \infty)$; б) $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (2; \infty)$ **627.-** $2^2 \cdot 3 \cdot 7$. **628.** а) 205,9; б) $25\frac{34}{81}$. **629.** а) $\cos \alpha = 0,8$; $\tg \alpha = 0,75$; $\ctg \alpha = \frac{4}{3}\ctg$, б) $\sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos \alpha = -\frac{1}{5}$; $\tg \alpha = 0,5$; в) $\ctg \alpha = k$, $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$, $\cos \alpha = -\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$. **630.** а) $\sin^2 \alpha$; б) $-\cos^2 \alpha$; в) $\frac{1}{\sin^2 \alpha}$; г) $\tg \alpha \cdot \ctg \beta$; р) $\ctg^2 \alpha$; д) $1 + \alpha$; е) $1 + \alpha$; ё) $-\ctg^2 \alpha$. **631.** а) 2; б) $\frac{\sin^2 \alpha \cdot \ctg \alpha}{1 + \sin \alpha}$. **632.** а) $\sin \alpha \cos \alpha$; б) 1; в) $\cos \alpha$; г) $0,5 \sin \alpha$. **633.** а) 0,8; б) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$; в) $-\frac{8}{15}$; г) $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **634.** а) $\cos \alpha = 0,28$; $\tg \alpha = 3,43$; $\ctg \alpha = -0,29$; б) $\cos \alpha = 0,6$; $\tg \alpha = -1\frac{1}{6}$; $\ctg \alpha = 0,75$; в) $\cos \alpha = 0,8$; $\tg \alpha = 0,75$ $\ctg \alpha = \frac{1}{3}$; г) $\cos \alpha = -0,95$; $\tg \alpha = 0,32$; $\ctg \alpha = 3,18$, р) $\sin \alpha = 0,866$ $\tg \alpha = -1,73$; $\ctg \alpha = -0,577$, д) $\sin \alpha = -0,8$; $\tg \alpha = -\frac{1}{3}$; $\ctg \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, е) $\sin \alpha = 0,94$; $\tg \alpha = 8,6$; $\ctg \alpha = -0,35$, ж) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$; $\tg \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\ctg \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. **635.** а) $3\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}$; в) $2\sqrt{2}$. **636.** а) 180; б) 48; в) 6; г) 24. **637.** 9; $\frac{1}{4}$. **638.** а) $(-\infty; 6)$; б) $[1\frac{5}{7}; \infty)$. **639.** (36 ва 152). **640.** а) (10; -2); (-2; 10), б) (2; 1,2); (-1,2; -2). **641.** а) $-\tg^2 \alpha$; б) $\ctg^2 \alpha$; в) $\cos^2 \alpha$; г) $\frac{1}{2} \sin \alpha$. **642.** а) $\frac{2}{\sin \alpha}$; б) $\frac{2}{\cos \beta}$; в) $\frac{2}{\cos^2 \alpha}$; г) $\frac{2}{\sin^2 \beta}$; р) $\frac{1}{\sin \alpha}$; д) $\frac{1}{\sin \alpha}$. **644.** а) $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$; б) $\frac{1}{\sin^2 \alpha}$; в) 1. **645.** а), б), в), р), ҳа г) ва д) не. **647.** а) $\sin^2 \alpha$; б) $(\frac{1}{\cos \alpha} - 1)^2$. **648.** $\frac{3\alpha+1}{\alpha+1}$ **649.** а) (-5;2); б) (6;-8); (-8;6). **650.** Нишондод. $\frac{60}{20+x} + \frac{60}{20-x} = \frac{25}{4}$; **651.** $(\frac{10}{x} + \frac{10}{x+3} + \frac{23}{4(x+3)} = 1)$ (24 соат ва 27 соат). **652.** а) ҳа; б) не. **653.** а) $\sin \alpha$; б) $\cos \alpha$; в) $-\sin^2 \alpha$; г) $\cos \alpha$; р) $\ctg \alpha$;

д) $-\operatorname{ctg} \alpha$; е) $\operatorname{tg}^2 \alpha$; ё) $-\operatorname{tg} \alpha$ **654.** а) $\sin \alpha$; б) $\cos \alpha$; в) $\operatorname{ctg} \alpha$; г) $\operatorname{tg} \alpha$; ґ) $-\sin \alpha$; д) $\cos \alpha$; е) $-\operatorname{ctg} \alpha$; ё) $-\operatorname{tg} \alpha$. **655.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $-\sqrt{3}$. **656.** а) $\sin 34^\circ$, $-\sin 42^\circ$, $-\operatorname{tg} 6^\circ$, $-\operatorname{ctg} 14^\circ$; б) $-\cos 5^\circ$, $\cos 28^\circ$, $-\operatorname{tg} 10^\circ$, $-\operatorname{ctg} 4^\circ$; в) $-\sin 4^\circ$, $\operatorname{ctg} 42^\circ$, $\operatorname{tg} 5^\circ$; г) $\cos 14^\circ$, $\sin 32^\circ$, $-\operatorname{tg} 20^\circ$, $\operatorname{tg} 30^\circ$. **657.** а) 1; б) 2. **658.** а) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$; б) 1; в) $\sin^2 \alpha$; г) $\sin \alpha$; ґ) 4; д) 0. **659.** а) $\sin \alpha$; б) $\operatorname{ctg} \alpha$; в) $\sin \alpha \cos \alpha$. **661.** а) 1; б) 1; в) $-\sin \alpha$; г) 1; ґ) 1. **662.** а) $(-\infty; -8) \cup (5; \infty)$; б) $(-10; 14)$. **663.** а) 27; б) $1\frac{7}{9}$. **664.** а) (1; 4), (4; 1); б) (4; 3). **665.** Нишондод. $x + \frac{60-x}{60}x = 40$, $x = 30$ л. **667.** Нишондод. Матни масъала ба ҳалли муодилаи зерин меорад: $\frac{5}{12} + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{9}\right)x = 1$ **668.** а) 3; в) 3; ґ) $-\frac{3}{2}$; **669.** а) 11; в) 729; ґ) 21; **670.** а) 6; в) 10. **673.** а) $(-\infty, \sqrt[3]{5})$; в) $(\sqrt[7]{11}; \infty)$; ґ) $(8; \infty)$; е) $[0; 81]$. **676.** а) $11\frac{1}{2}$; $3\frac{17}{7}$. **678.** а) 32; в) 3072; ґ) $\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{5}\right)^4$. **680.** а) $a^{0,5} - b^{0,5}$; б) $\frac{1}{x^2+4}$; в) $a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}}$; г) $z^{\frac{1}{3}} - 2$.

МУНДАРИЧА

Боби I. ФУНКСИЯИ КВАДРАТӢ

§1. Функцияҳо ва хосиятҳои онҳо	3
1. Бузургиҳои доимӣ ва тағйирёбанда. Функция	3
2. Тарзҳои дода шудани функция. Соҳаи муайянии функция	5
3. Функцияҳои чуфт ва тоқ	10
4. Афзуншавӣ ва камшавии функция	12
§2. Сеаъзогии квадратӣ ва ҷудокунии он ба зарбкунандаҳо	17
5. Ҷудо кардани квадрати пурра аз сеаъзогии квадратӣ	17
6. Ба зарбкунандаҳо ҷудо кардани сеаъзогии квадратӣ	20
§3. Функцияи квадратӣ, хосиятҳо ва графики он	24
7. Функцияи квадратӣ ва хосиятҳои он	24
8. Экстремуми функцияи квадратӣ	29
9. Графики функцияи квадратӣ	32
§4. Ҳалли нобаробарии квадратӣ	43
10. Тарзи графии ҳалли нобаробарии квадратӣ	43
11. Бо методи фосилаҳо ҳал кардани нобаробарии	49
Маълумоти таърихӣ	55
Машқҳои иловагӣ ба боби I	56
Ҷавобҳо	59

Боби II. МУОДИЛА ВА СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲО

§5. Муодилаҳои якномаълума	67
12. Муодилаи бутун ва дараҷаи он	67
13. Ҳалли муодилаҳои якномаълума	70
14. Муодилаҳое, ки ба муодилаи квадратӣ оварда мешаванд	76
§6. Системаи муодилаҳои дуномаълума	79
15. Муодилаи дуномаълума ва графики он	79
16. Муодилаи давра	81
17. Тарзи графии ҳалли системаи муодилаҳо	84
18. Ҳалли системаи муодилаҳои дараҷаи дуум	87
19. Системаи муодилаҳои якҷинса ва симметрикӣ	92
20. Ҳалли масъалаҳои матнӣ бо ёрии системаи муодилаҳои	
дараҷаи дуум	98
Маълумоти таърихӣ	102
Машқҳои иловагӣ ба боби II	107
Ҷавобҳо	112

Боби III. ПРОГРЕССИЯҲО

§7. Прогрессияи арифметикӣ	121
21. Пайдарпайии ададӣ ва тарзи дода шудани онҳо	121
22. Таърифи прогрессияи арифметикӣ	127
23. Формулаи аъзои n -уми прогрессияи арифметикӣ	130
24. Формулаи суммаи n аъзои аввалии прогрессияи	
арифметикӣ	137

§8. Прогрессияи геометрӣ.	143
25. Таърифи прогрессияи геометрӣ	147
26. Формулаи аъзои n -уми прогрессияи геометрӣ	147
27. Формулаи суммаи n аъзои аввалаи прогрессияи геометрӣ	151
28. Суммаи прогрессияи геометрии беохири камшаванда	157
§9. Баъзе хосиятҳои дигари прогрессияҳо. Ҳалли масъалаҳои хар ду намуди прогрессияҳои дарбаргиранда	164
Маълумоти таърихӣ	168
Қавобҳо	177
Боби IV. ИФОДАҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ ВА ТАБДИЛДИҲИИ ОНҲО	
§10. Функсияи тригонометрии кунҷи дилҳо	185
29. Кунҷҳо, камонҳо ва ченкунии онҳо	185
30. Таърифи синус, косинус, тангенс ва котангенс кунҷи дилҳо	190
§11. Айниятҳои асосии тригонометрӣ ва татбиқи онҳо	196
31. Баъзе хосиятҳои функсияҳои тригонометрӣ	196
32. Муносибатҳои байни функсияҳои тригонометрии як кунҷ	199
33. Табдилдиҳии ифодаҳои тригонометрӣ	202
§12. Формулаҳои мувофиқоварӣ..	204
Боби V. Дараҷаи нишондихандааш ратсионалӣ	
§13. Дараҷаи нишондихандааш ратсионалӣ	209
34. Решаи дараҷаи n -ум ва хосиятҳои он	209
35. Дараҷаи нишондихандааш ратсионалӣ ва хосиятҳои он	213
Маълумоти таърихӣ	216
Машқҳои иловагӣ ба бобҳои IV ва V	217
Қавобҳо	220

Муҳаррирон: Н. Абдуллоев
Ф. Раҳимов

Мусахҳеҳ: К. Қодирӣ
Тарроҳ: М. Каримов

Хуруфчин ва саҳифабанд: М. Каримов

Ба ҷоп 11.05.2013 имзо шуд.

Андозаи қоғаз 60x90 1/16. Қоғази офсет.

Ҷопи офсет. Гарнитурани Times New Roman Tj.

Ҳаҷм 14 ҷузъи ҷопии асли. Супориши № 6.

Адади нашр 90000.

КВД «Комбинати полиграфии шаҳри Душанбе»
734063 Душанбе, кӯчаи Айни, 126

§8. Прогрессияи геометрӣ.	143
25. Таърифи прогрессияи геометрӣ	143
26. Формулаи аъзои n -уми прогрессияи геометрӣ	147
27. Формулаи суммаи n аъзои аввалаи прогрессияи геометрӣ	151
28. Суммаи прогрессияи геометрии беохирӣ камшаванда	157
§9. Баъзе хосиятҳои дигари прогрессияҳо. Ҳалли масъалаҳои ҳар ду намуди прогрессияҳо дарбаргиранда	164
Маълумоти таърихӣ	168
Ҷавобҳо	177
Боби IV. ИФОДАҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ ВА ТАБДИЛ-ДИҲӢИ ОНҲО	
§10. Функсияи тригонометрии кунҷи дилҳо	185
29. Кунҷҳо, камонҳо ва ҷенкунии онҳо	185
30. Таърифи синус, косинус, тангенс ва котангенс кунҷи дилҳо	190
§11. Айниятҳои асосии тригонометрӣ ва татбиқи онҳо	196
31. Баъзе хосиятҳои функсияҳои тригонометрӣ	196
32. Муносибатҳои байни функсияҳои тригонометрии як кунҷ	199
33. Табдилдиҳии ифодаҳои тригонометрӣ	202
§12. Формулаҳои мувофиқоварӣ..	204
Боби V. Дараҷаи нишондиҳандаи ратсионалӣ	
§13. Дараҷаи нишондиҳандаи ратсионалӣ	209
34. Решаи дараҷаи n -ум ва хосиятҳои он	209
35. Дараҷаи нишондиҳандаи ратсионалӣ ва хосиятҳои он	213
Маълумоти таърихӣ	216
Машқҳои иловагӣ ба бобҳои IV ва V	217
Ҷавобҳо	220

Муҳаррирон: Н. Абдуллоев
Ф. Раҳимов
Мусахҳех: К. Қодирӣ
Таррох: М. Каримов
Ҳуруфчин ва саҳифабанд: М. Каримов

Ба ҷоп 11.05.2013 имзо шуд.
Андозаи қоғаз 60x90 1/16. Қоғази офсет.
Ҷопи офсет. Гарнитурани Times New Roman Tj.
Ҳаҷм 14 ҷузъи ҷопии асли. Супориши № 6.
Адади нашр 90000.

КВД «Комбинати полиграфии шаҳри Душанбе»
734063 Душанбе, кӯчаи Айний, 126

Усмонов Нурулло, Пиров Раҳмон

АЛГЕБРА

китоби
дарсӣ
барои
синфи

9

НАШРИ СЕЮМ

*Вазорати маорифи Ҷумҳурии Тоҷикистон
тавсия кардааст*

КВД
«Комбинати полиграфии
шаҳри Душанбе»
2013

Ҷадвали истифодаи иҷравии китоб

№	Ному насаби хонанда	Синф	Соли хониш	Ҳолати китоб (баҳои китобдор)	
				Аввали сол	Охири сол

Омӯзгорони мухтарам!

Хоҳишмандем фикру мулоҳизаҳои худро оид ба мазмуни китоби мазкур ба нишони 734024, ш. Душанбе, кӯчаи Айни 45, Пажӯҳишгоҳи рушди маорифи Академияи таҳсилоти Тоҷикистон ирсол доред.

Усмонов Н., Пиров Р.

У-73

Алгебра. Китоби дарсӣ барои синфи 9-и мактабҳои таҳсилоти умумӣ. Соли 2013. 224 саҳифа.

ФУНКСИЯИ КВАДРАТӢ

§1. Функцияҳо ва хосиятҳои онҳо

§2. Соезгоии квадратӣ ва ҷудокунии он ба зарбкунандаҳо

§3. Функцияи квадратӣ, хосиятҳо ва графики он

§4. Ҳалли нобаробариҳои квадратӣ

§1. ФУНКСИЯҲО ВА ХОСИЯТҲОИ ОНҲО

1. Бузургҳои доимӣ ва тағйирёбанда. Функция

Татбиқи математика дар омӯзиши қонунҳои табиат ва истифодаи он дар техника ва дигар соҳаҳо водор месозад, ки дар математика мафҳуми бузургҳои доимӣ ва тағйирёбандаро дохил намоем.

Бузургии тағйирёбанда гуфта, ҳамин гуна бузургиеро меноманд, ки дар шартӣ масъалаи додашуда қиматҳои гуногунро қабул менамояд.

Агар бузургӣ дар шартӣ масъала қиматашро тағйир надиҳад, онро бузургии доимӣ меноманд.

Ҳамон як бузургӣ дар як масъала тағйирёбанда ва дар масъалаи дигар доимӣ шуда метавонад.

М и с о л. Бузургҳои зерин доимианд:

а) нисбати дарозии давра ба диаметраш ($\frac{c}{d} = \pi$); ($\pi \approx 3,14$);

б) суммаи кунҷҳои дарунии секунҷа (180°);

в) суръати ҳаракати мунтазам V , ки қонунаш бо формулаи $S = V \cdot t$, $V = \frac{S}{t}$, ифода ёфта, дар он S - масофа, t - вақт аст;

г) шитоби қувваи вазнинӣ g , ки ба $9,81 \text{ м/сония}^2$ баробар аст.

Бузургҳои зерин тағйирёбанда мебошанд:

а) масофаи байни парашутчии аз тайёра ҷаҳида то сатҳи Замин;

б) кунҷи биниш, ки дар таҳти он объектӣ (қатора, одам, танк ва ғайраҳо) аз мушоҳид дуршаванда дида мешавад.

в) суръате, ки дар вақти тағйирёбии фишор бо он моеъ аз сӯроҳии зарф мечакад;

г) ҳарорати ҳаво дар ҳар як соати шабонарӯз.

Одатан бузургҳои тағйирёбандаро бо ҳарфҳои охири алифбои латинӣ $x, y, z...$ ва бузургҳои доимиро бо ҳарфҳои аввали алифбои латинӣ $a, b, c...$ ишорат мекунам.

Меъунд, ки ду бузургии тағйирёбандаи x ва y бо ҳамдигар функционалӣ вобастаанд, агар ба ҳар як қимати якеи онҳо як ё якчанд қимати муайяни дигараш мувофиқ ояд.

Масалан, дарозии давра ва радиуси он ($S=2\pi R$) масофаи тайшуда ва суръати ҳаракати мунтазам дар вақти додашуда ($S=V \cdot t$), бо ҳам функционалӣ вобастаанд,

Таъриф. Чунин вобастагии тағйирёбандаи y аз тағйирёбандаи x , ки дар он ба ҳар як қимати тағйирёбандаи x қимати муайяни тағйирёбандаи y мувофиқ меояд, **функсия** номида мешавад.

Тағйирёбандаи x *тағйирёбандаи новобаста* ё *аргумент* номида мешавад. Тағйирёбандаи y *тағйирёбандаи вобаста* ном дорад. Дар ин ҳолат меъунд, ки тағйирёбандаи y **функсияи** тағйирёбандаи x мебошад. Қиматҳои тағйирёбандаи вобастаро *қиматҳои функсия* меноманд.

Агар вобастагии тағйирёбандаи y аз тағйирёбандаи x **функсия** бошад, онро мухтасар ин тавр менависанд: $y=f(x)$ (игрек баробар аст ба эф аз икс). Навишти $y=f(x)$ қонун ё қоидаи ба ҳар як қимати додашудаи x мувофиқ омадани қимати муайяни f -ро ифода мекунад.

Масалан, агар $y = \frac{x}{1+x^2}$ бошад, он гоҳ барои ёфтани қимати y :

- а) қимати аргументи x -ро ба квадрат бардошта;
- б) ба квадрати аргумент 1-ро ҷамъ карда;
- в) x -ро ба суммаи $1+x^2$ тақсим кардан лозим аст.

Мисолҳои болоро муоина намуда, чунин хулоса карда метавонем:

а) масофаи байни парашутчӣ ва сатҳи Замин **функсияи** вақт аст;

б) қунҷе, ки зери он аз нуқтаи маълум ашё дида мешавад, **функсияи** масофаи байни мушоҳид ва ашё аст.

Акнун ду мисоли ҳисоби қиматҳои **функсияро** муоина мекунем. Чӣ тавре, ки дар боло қайд кардем, барои ин дар формулаи $y=f(x)$ ба ҷойи x қимати мувофиқаширо гузоштан лозим аст.

1. Агар **функсия** бо формулаи $y=f(x) = 2x^2 - 6$ дода шуда бошад, он гоҳ барои қиматҳои x -и ба 1; 2,5; -3 баробар қиматҳои мувофиқи $f(x)$ ба $f(1)=2 \cdot 1^2 - 6 = 2 - 6 = -4$; $f(2,5)=2 \cdot (2,5)^2 - 6 = 6,5$; $f(-3)=2 \cdot (-3)^2 - 6 = 12$ баробар аст.

2. **Функсия** бо формулаи $y=-5x+6$ дода шудааст. Қиматҳои **функсияро** ҳангоми ба 2; 3 ва 1,2 баробар будани x меёбем: $f(2)=-5 \cdot 2 + 6 = -10 + 6 = -4$; $f(3)=-5 \cdot 3 + 6 = -15 + 6 = -9$; $f(1,2)=-5 \cdot 1,2 + 6 = -6 + 6 = 0$.

?

1. Чӣ гуна бузургҳо бузургҳои доимӣ ва чӣ гуна бузургҳо тағйирёбандаро номида мешаванд? 2. Мисоли бузургҳои доимӣ ва тағйирёбандаро оред. 3. Ду бузургӣ дар кадом ҳолат бо ҳам функсионалӣ вобастаанд? 4. Таърифи функсияро баён кунед. 5. Қимати функсия ҳангоми дода шудани аргумент чӣ тавр ҳисоб карда мешавад?

1. Функсия бо формулаи $f(x)=5x^2+2$ дода шудааст.

Ёбед: а) $f(1)$; б) $f(-1)$; в) $f(0)$; г) $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. $f(x)=2x^3-6$. Ёбед: а) $f(3)$; б) $f(4)$; в) $f(-2)$; г) $f(-3)$.

3. $f(x)=-5x+6$. Қимати x -ро ёбед, ки дар он:

а) $f(x)=17$;

б) $f(x)=0$;

в) $f(x)=6$;

г) $f(x)=10$;

д) $f(x)=-5$ бошад.

4. $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$. Ёбед:

а) $f(0)$;

б) $f(a^2)$;

в) $f(2)$;

г) $f(3)$;

д) $f(-2)$.

Машқҳо барои тақрир

5. Муодиларо ҳал кунед:

а) $2x^2+3x=0$

в) $5x^2-4x=0$

г) $1-4x^2=0$

б) $3x^2-2=0$

г) $7x-14x^2=0$

д) $2x^2-6=0$.

6. Ҳисоб кунед:

а) $\left(21 - 3\frac{7}{16}\right) - \left(21\frac{5}{12} - \frac{41}{48}\right)$; б) $\left(3\frac{5}{8} + \frac{1}{4} + 2\frac{7}{12}\right) \cdot 0,2 \left(4\frac{8}{15} - \frac{11}{3} + \frac{17}{45}\right)$.

7. Маҳраҷи касри одие аз сураташ 3 воҳид калон аст. Агар ба сурат 7 ва ба маҳраҷ 5-ро ҷамъ кунем, он гоҳ касре ҳосил мешавад, ки аз касри аввала ба $\frac{1}{2}$ зиёд аст. Касри маъмурро ёбед.

2. Тарзҳои дода шудани функсия.

Соҳаи муайянии функсия

Вобастагии байни қиматҳои тағйирёбандаҳои x ва y бо тарзҳои гуногун дода мешаванд.

А) **Тарзи аналитикӣ** (дар шакли формула). Агар вобастагии байни тағйирёбандаҳои y ва x чунин дода шуда бошанд, ки он баъзе ҷуфтҳои қиматҳои функсия y ҳангоми дода шудани қиматҳои аргумент x тартиби иҷро кардани амалҳоро муайян намоёнд, он гоҳ мегӯянд, ки функсия аналитикӣ ё дар шакли формула дода шудааст. Масалан, функсияи $y = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ ва $y=x^3+5x^2-x+4$ аналитикӣ дода шудаанд.

Дар баъзе мавридҳо функсия на бо як формула, балки дар фосилаҳои гуногун бо формулаҳои хархела дода мешавад. Масалан,

$$\text{функсияи } y = \begin{cases} 2x - 1, \text{ агар } 0 \leq x \leq 3 \\ -x + 8, \text{ агар } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

дар порчаи $[0;3]$ бо формулаи $y=2x-1$ ва дар нимфосилаи $(3;5]$ бо формулаи $y=-x+8$ дода шудааст.

Б) **Тарзи чадвали.** Моҳияти чунин тарзи дода шудани функсия аз он иборат аст, ки барои қиматҳои муайяни ададии аргумент қиматҳои мувофиқи функсия дода мешавад. Масалан, ҳарорати ҳаво дар соатҳои бутуни шабонарӯз, миқдори ҷамъовардаи пахтаи соҳибкор дар 5 соли охир ва ғайра мисоли функсияҳои чадвалианд.

Дар сатри аввала қиматҳои аргумент ва дар сатри дуюм қиматҳои мувофиқи функсия ҷойгир карда мешаванд:

x	x	x_2	x_3	...	x_n	...
y	y_x	y_2	y_3	...	y_n	...

Чадвалҳои ба мо маълуми квадратҳо, кубҳо, решаҳои квадратӣ ва ҷанде дигар аз ададҳои натуралӣ аз рӯи ҳамин тартиб сохта шудаанд.

Масалан, чадвали

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10 \cdot n}$
1	1	1	1.000	3.162
2	4	8	1.414	4.472
3	9	27	1.732	5.477

(Хотиррасон мекунем, ки мо аллакай чунин чадвалҳоро дар синфҳои 7-8 барои вобастагӣҳои мутаносибии ростаи $y=kx$, хаттии $y=ax+b$, мутаносибии ҷаъшаи $y = \frac{k}{x}$ сохта будем).

Агар фарқи ду қимати дилхоҳи аргументи ҳамсоя якхела бошад, яъне $h = -x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots$, он гоҳ чадвалро чадвали қиматҳои функсия бо қадами h меноманд. Масалан, чадвали қиматҳои функсияи

$y=x^2+1$ бо қадами $h = \frac{1}{2}$ дар порчаи $[0;3]$ чунин аст:

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	1	1.25	2	3.25	5	7.25	10

В) Тарзи графикӣ. Вобастагии байни аргументи x ва функсияи y -ро ба намуди ягон хат (умуман, хати қатъ) тасвир кардан мумкин аст. Абсиссаи нуқтаи дилхоҳи ин хати қатъ ягон қимати аргументи x , ординатаи он бошад, қимати мувофиқи функсияи y -ро ифода мекунад.

Таърифи 1. Маҷмӯи ҳамаи нуқтаҳои ҳамворӣ, ки координатаҳои онҳо x ва y баробарии $y=f(x)$ -ро қаноат мекунад, графики $y=f(x)$ номида мешавад.

Ҳар як вобастагии функционалии ду тағйирёбандаро дар ҳамворӣ ба таври графикӣ тасвир кардан мумкин аст. Барои амалӣ гардонидани ин мақсад дар ҳамворӣ тирҳои координатавӣ дохил мекунад. Тири уфуқӣ - *тири абсисса*, тири амудӣ - *тири ордината* ном дорад.

Аз рӯи ягон масштаб дар тири абсисса қиматҳои аргументи x ва дар тири ордината қиматҳои y -ро мегузорем. Ҳар як ҷуфти ададҳо, ки аз як қимати абсисса ва як қимати ордината иборат аст, як нуқтаи графикро муайян мекунад (нигаред ба расми 1, а).

Барои сохтани графики функсияи ба формула додашуда ин тавр амал мекунем:

1. ҷадвали қиматҳои аргументи x ва қиматҳои мувофиқи функсияи y -ро бо ягон қадами h , ки пешакӣ интиҳоб карда мешавад, тартиб медиҳем;

2. системаи координатаҳои xOy -ро сохта, дар ҳар як гири он масштаб интиҳоб мекунем;

3. ҳар як ҷуфти қиматҳои x ва y -ро, ки дар ҷадвал ҷойгир карда шудааст, ба сифати координатаҳои нуқтаи графики матлуб қабул карда, ин нуқтаҳоро месозем;

4. нуқтаҳои сохташударо пайваст мекунем.

Хати қатъ, ки дар ҳамвории координатавӣ пас аз иҷрои ин амалиётҳо ҳосил мешавад, графики функсия мебошад. Агар миқдори нуқтаҳои қайдшуда ҳарчанд зиёд бошад, графики функсия ҳамон қадар саҳеҳтар мешавад.

Акнун, мафҳумҳои соҳаи муайянии функсия ва соҳаи қиматҳои онро дохил мекунем.

Таърифи 2. Ҳамаи қиматҳои имконпазири тағйирёбандаи новобаста соҳаи муайянии функсия номида мешавад. Ҳамаи қиматҳое, ки функсия ҳангоми дар соҳаи муайяниаш тағйир ёфтани тағйирёбандаи новобаста қабул мекунад, соҳаи қиматҳои функсия ном дорад.

Агар функсия дар шакли формула дода шуда бошад, он гоҳ соҳаи муайянии чунин функсия аз ҳамаи қиматҳои аргумент, ки барояшон формула маъно дорад, иборат мебошад. Масалан, соҳаи

муайянии функсияи $y=f(x)=5x+x^2$ аз маҷмӯи ҳамаи ададҳо; соҳаи муайянии функсияи $f(x)=\frac{2}{x+3}$ аз маҷмӯи ҳамаи ададҳо, гайр аз -3 иборат аст. Соҳаи муайянии функсияи $y=\sqrt{x-2}$ бошад, аз маҷмӯи ададҳои аз 2 калон ё ба 2 баробарбуда иборат мебошад.

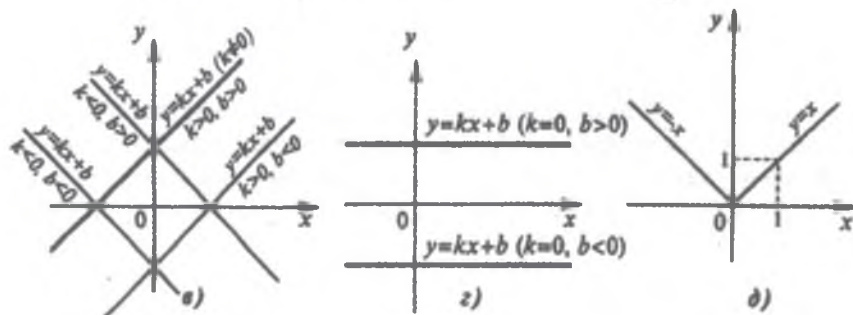
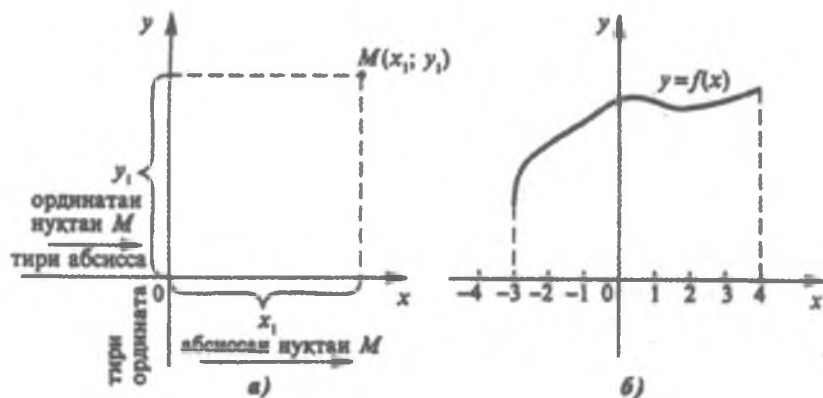
Қайд мекунем, ки агар функсия касран ратсионалӣ бошад, он гоҳ соҳаи муайянии он маҷмӯи ададҳоест, ки барояшон қимати махраҷи каср нул нест (дар назар дошта мешавад, ки ифодаи дар суратбуда барои ҳар гуна қимати аргумент дорой қимат аст).

Масалан, соҳаи муайянии функсияи $y=\frac{2x}{x^2-1}$ ҳамаи ададҳои x , ки барояшон $x^2-1 \neq 0$ аст, яъне $x \neq -1$ ва $x \neq 1$ мебошад.

Дар расми 1,6 графики функсияи $y=f(x)$ тасвир шудааст. Порчаи $[-3;4]$ соҳаи муайянии он мебошад.

Графики функсияи $y=kx+b$ (k ва b ададҳо мебошанд) аз ҳамаи рост иборат аст (расми 1,в; расми 1,г). Маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ соҳаи муайянии он мебошад.

Функсияи бо формулаи $y=|x|$ додашударо муоина мекунем.



Расми 1

Азбаски ифодаи $|x|$ барои қиматҳои дилхоҳи x маъно дорад, пас маҷмӯи ҳамаи ададҳо соҳаи муайянии ин функсия мебошад. Агар $x \geq 0$ бошад, $|x|=x$ ва агар $x < 0$ бошад, $|x|=-x$ аст, яъне

$$y = |x| = \begin{cases} x, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бошад,} \\ -x, & \text{агар } x < 0 \text{ бошад.} \end{cases}$$

Графики ин функсия дар нимпорчаи $[0; \infty)$ бо графики функсияи $y=x$ ва дар фосилаи $(-\infty; 0)$ бо графики функсияи $y=-x$ ҳамчоя мешавад. Графики функсияи $y=|x|$ дар расми 1,д тасвир шудааст. Ин график аз ду нуре, ки аз ибтидои координатаҳо баромада чоряки I ва II-ро ба ду ҳиссаи баробар тақсим мекунад, иборат аст.

Таърифи 3. Қиматҳои аргумент, ки дар онҳо функсия ба нул баробар аст, нулҳои функсия номида мешаванд.

Масалан, барои функсияи $y=2x \cdot (x-3)$ ададҳои 0 ва 3 нулҳо мебошанд. Барои функсияи $y=\frac{4-x}{5}$ адади 4 нули он аст.

Зоҳиран фаҳмост, ки графики функсия тири абсиссаро маҳз дар ҳамаи нуқтаҳо мебурад, ки онҳо нули функсия мебошанд. Масалан, графики функсияи $y=(x+1)(x-2)$ тири абсисса Ox -ро дар нуқтаҳои $x=-1$ ва $x=2$ мебурад.

?

1. Тарзҳои дода шудани функсияро номбар кунед. Онро бо мисолҳои мушаххас шарҳ диҳед. 2. Соҳаи муайянии функсия чист? 3. Кадом қиматҳои тағйирёбандаҳо соҳаи муайяни касри раціоналиро ташкил карда метавонанд? 4. Соҳаи қиматҳои функсия чист? 5. Нулҳои функсия гуфта чиро дар назар доранд?

8. Соҳаи муайянии функсияро ёбед.

а) $y=2x-4$; в) $y = \frac{x}{3-x}$; г) $y = \frac{2}{(x-5)(x+2)}$; е) $y = \sqrt{10+x}$;
 б) $y=x^2-3x+2$; г) $y=\frac{3}{x^2+1}$; д) $y=\sqrt{x-4}$; ё) $y=\sqrt{100+x}$;

9. Ягон функсияро мисол оред, ки а) маҷмӯи ҳамаи ададҳо, гайр аз 10; б) маҷмӯи ҳамаи ададҳо, гайр аз ададҳои 2 ва 3; в) ҳамаи ададҳои гайриманфӣ; г) ҳамаи ададҳои аз 20 калон ё ба он баробар соҳаи муайяниаш бошанд.

10. Соҳаи муайянии ва соҳаи қиматҳои функсияи: а) $y=x^2$; б) $y=x^3$ - ро ёбед.

11. Агар а) $f(x)=x \cdot (x+9)$; б) $f(x)=\frac{x+5}{7-x}$; в) $f(x)=x \cdot (x-9)$; г) $f(x)=\frac{x-1}{2x}$ бошад, қиматҳои x -ро ёбед, ки барояшон $f(x)=0$ аст.

12. Графики функцияро созед:

а) $f(x) = \frac{1}{2} - 5x$; б) $f(x) = 4,6x$; в) $f(x) = \frac{5}{x}$; г) $f(x) = -2x$.

13. Функцияи $y = x^3 - 3$, ки дар он $-3 \leq x \leq 3$ аст, дода шудааст. Чадвали киматҳояшро бо кадами $h=1$ дар порчаи $[-3; 3]$ тартиб диҳед ва графики функцияро созед.

Машиқҳо барои такрор

14. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} 3x + 5y = 4; \\ 7x - 3y = 24; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x - 2y = 11; \\ 4x - 5y = 3; \end{cases}$

15. Нобаробарио ҳал кунед:

а) $\frac{2x-5}{3} - 1 > 3 - x$;

б) $\frac{5x-1}{4} > 2$.

16. Муодилаи квадратино ҳал кунед:

а) $(x-7)(x+3) + (x-1)(x+5) = 102$; б) $(x+3)(x-4) = -12$.

17. Оилаи аз панҷ нафар иборатбуда дар як сол (365 рӯз) чанд кг нон истеъмол мекунад, агар маълум бошад, ки ба ҳисоби миёна дар як рӯз ҳар як узви оила 0,4 кг нон истеъмол мекунад.

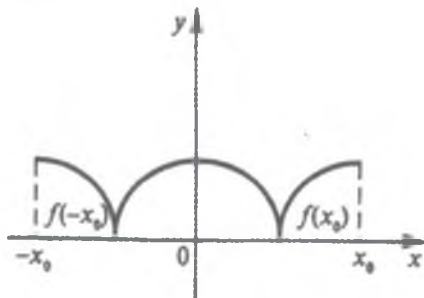
3. Функцияҳои чуфт ва тоқ

Пеш аз он ки дар бораи чуфт ва тоқ будани функцияҳо сухан ронем, мафҳуми маҷмӯи ададии симметриро шарҳ медиҳем.

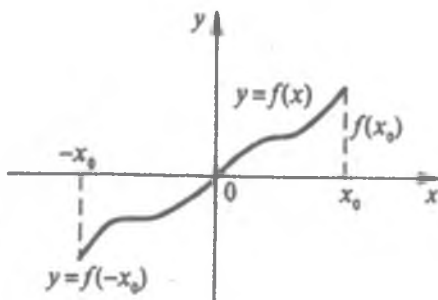
Таърифи 1. Маҷмӯи ададии D нисбат ба ибтидои координата симметрӣ номида мешавад, агар адади x аз D чӣ гунае бошад, адади $-x$ ҳам мутааллиқи ин маҷмӯъ бошад.

Ба ин гуна маҷмӯъ мисол шуда метавонад: маҷмӯи ададҳои бутун, ҳамаи касрҳои дуруст, ҳар гуна порчаи $[-a; a]$ ё фосилаи $(-a, a)$.

Бигузор соҳаи муайянии функцияи $y = f(x)$ маҷмӯи симметрӣ аст.



Расми 2



Расми 3

Таърифи 2. Функция чуфт номида мешавад, агар он хангоми тағйир ёфтани аломати аргумент киматашро дигар накунад, яъне:

$$f(-x)=f(x).$$

Таърифи 3. Функция тоқ номида мешавад, агар он хангоми тағйирёбии аломати аргумент аломаташро тағйир дода, кимати мутлақашро нигоҳ дорад:

$$f(-x)=-f(x)$$

Мувофиқи таърифи функцияи чуфт графики он нисбат ба тири ордината симметрӣ (масалан, расми 2) аст ва графики функцияи тоқ бошад, нисбат ба ибтидои координатаҳо симметрӣ мешавад (масалан, расми 3).

Мисолҳои функцияҳои чуфт ва тоқ:

1) $y=kx^2$, дар ин ҷо k адади доимӣ аст. Шартӣ $k(-x)^2=kx^2$ иҷро мешавад, пас функция чуфт мебошад.

2) Функцияи $y=kx^3$, ки дар ин ҷо k адади доимӣ мебошад, шартӣ $k(x^3)=-kx^3$ -ро қаноат мекунонад ва бинобар ин, функция тоқ аст. Умуман, функцияи дараҷагӣ, яъне функцияи $y=kx^m$:

а) чуфт аст, агар m адади натуралӣ чуфт бошад;

б) тоқ аст, агар m адади натуралӣ тоқ бошад.

3) Функцияи кимати мутлақ, яъне $y=|x|$ чуфт мебошад, чунки $|-x|=|x|$ аст.

Нишон медиҳем, ки функцияи $y=3x+1$ на чуфт ва на тоқ аст.

Барои ин бояд нишон диҳем, ки функция ақаллан дар чуфти нуқтаҳои ба ҳам симметрии соҳаи муайяниаш шартҳои дар таърифҳои 2 ва 3 бударо қаноат намекунад. Дар ҳақиқат, агар $x=1$ гирем, он гоҳ кимати $f(1)=4$ ва $f(-1)=-2$ -ро ҳосил мекунем. Муқоисаи бевосита ба $f(1)\neq f(-1)$ ва $f(-1)\neq f(1)$ меорад, ки онҳо на чуфт ва на тоқ будани функцияи $y=3x+1$ -ро тасдиқ мекунад.

Мисол. Муайян мекунем, ки функцияҳои зерин чуфтанд ё тоқ:

$$\text{а) } y=x+\frac{1}{x}; \quad \text{б) } y=(x-3)^2+(x+3)^2; \quad \text{в) } y=x^2-x+3.$$

а) $y(-x)$ -ро муоина мекунем.

$$\text{Азбаски } y(-x)=(-x)+\frac{1}{(-x)}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-y(x) \text{ аст, бинобар ин}$$

$y=x+\frac{1}{x}$ функцияи тоқ мебошад.

$$\text{б) Барои функцияи } y=(x-3)^2+(x+3)^2, \quad y(-x)=(-x-3)^2+(-x+3)^2=$$

$$=(-(x+3))^2-(-(x-3))^2=(x+3)^2+(x-3)^2=y(x).$$

Ҳамин тавр, $y(-x)=y(x)$, яъне функцияи $y=(x-3)^2+(x+3)^2$ чуфт мебошад.

в) $y(-x)$ -ро ҳисоб мекунем:

$$y(-x)=(-x)^2-(-x)+3=x^2+x+3.$$

Функсияи $y=x^2-x+3$ на чуфт аст ва на тоқ чунки $y(-x) \neq y(x)$ ва $y(-x) \neq -y(x)$ мебошад.

- ?** 1. Таърифи функсияҳои чуфт ва тоқро диҳед. 2. Графикҳои функсияҳои чуфт ва тоқ нисбат ба системаи координатавӣ чӣ тавр ҷойгир мешаванд? 3. Доир ба функсияҳои чуфт ва тоқ мисолҳо оред.

Муайян кунед, ки функсияҳои зерин чуфтанд ё тоқ (18–21).

18. а) $y=x^4$; б) $y=x^5$; в) $y=-2x^2$; г) $y=x^7+2x$; д) $y=x \cdot |x|$.

19. а) $y=(x-3)^2-(x+3)^2$; б) $y=\sqrt{9-x^4}$; в) $y=0,5x^3-5x^2$; г) $y=\frac{x}{x^2-4}$

20. а) $y=\frac{x-3}{x+1}$; б) $y=x^2+x^4$; в) $y=\frac{x-x^3}{1+x^2}$; г) $y=\frac{1}{x^2}+2$.

21. а) $y=x^3+x$; б) $y=\frac{1}{x^5}$; в) $y=x^6-x^4$; г) $y=x^7-x$.

Машқҳо барои тақрор

22. Ҳисоб кунед.

а) $\frac{1+a-a^2}{1+a+a^2}$ -ро ҳангоми $a=0,5$;

б) $2a^3+3a^2-5a+6$ -ро ҳангоми $a=2$;

в) $|a-b|-|c-d|$ -ро ҳангоми $a=-5$, $b=4$, $c=-1$, $d=-3$;

г) $\frac{|a+x|}{2} - \frac{|a-x|}{2}$ -ро ҳангоми $a=-2$, $x=-6$ будан.

23. Қимати ифодаро ёбед:

а) $\frac{2^{8 \cdot 7^9}}{14^{10}} \cdot \frac{26^5 \cdot 2^{10}}{13^6 \cdot 8^4}$; б) $\frac{2^{8 \cdot 7^9}}{14^{10}} \cdot \frac{26^5}{13^{10} \cdot 8^4}$; в) $\left(\frac{51}{60} \cdot \frac{12}{17}\right) : \frac{3}{10}$; д) $\left(\frac{12}{95} : \frac{9}{38}\right) \cdot \frac{15}{16}$.

24. Ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед:

а) a^3-2a^2-a ; в) $3a^2x+6ax^2$; г) $18ab-9b^4$;

б) $x(a-c)+y(c-a)$; г) $9a^4-12a^3b$; д) $bx-2b+cx-2c$.

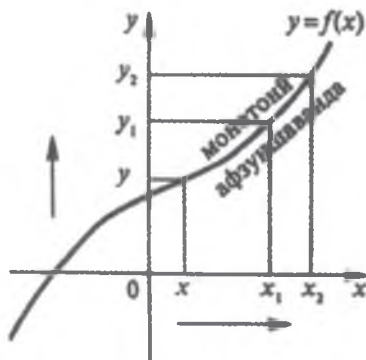
25. Кишӣ бо самти ҷараёни дарё 10 соат ҳаракат намуд. Он дар бозгашт ин масофаро дар ҷанд соат тай мекунад, агар маълум бошад, ки суръати ҳаракати кишӣ дар оби ором 15 км/соат буда, суръати оби дарё 3 км/соат аст.

4. Афзуншавӣ ва камшавии функсия

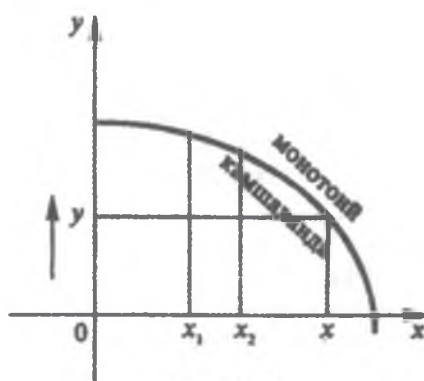
Таърифи 1. Функсияи $f(x)$ дар ягон фосила афзуншаванда мешавад, агар дар ин фосила ба қимати калони аргумент қимати калони функсия мувофиқ ояд, яъне дар ҳолати $x_2 > x_1$ будан $f(x_2) > f(x_1)$ шавад.



Расми 4



Расми 4, а



Расми 4, б

Таърифи 2. Функция дар ягон фосила камшаванда номида мешавад, агар дар ин фосила ба қимати калони аргумент қимати хурди функция мувофиқ ояд, яъне дар ҳолати $x_2 > x_1$ будан $f(x_2) < f(x_1)$ шавад.

Бузургии тағйирёбанда монотонӣ номида мешавад, агар вай фақат ба як самт тағйир ёбад, яъне ё фақат афзояд ё фақат кам шавад.

Маълум аст, ки ҳаракати нуқтаи x ба равиши мусбати тирӣ абсисса монотонӣ афзуншаванда буда, ба равиши баръакс бошад, монотонӣ камшаванда мешавад.

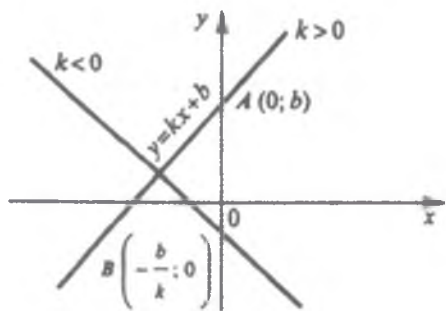
Функция монотонӣ афзуншаванда номида мешавад, агар ҳангоми афзуншавии аргумент қимати функция ҳам афзояд (расми 4, а).

Функция монотонӣ камшаванда номида мешавад, агар ҳангоми афзуншавии аргумент қимати функция кам шавад (расми 4, б).

Ба функцияи монотонӣ функцияи $y=kx+b$ мисол шуда метавонад. Дар ҳолати $k>0$ будан, функция монотонӣ афзуншаванда буда, дар ҳолати $k<0$ будан, функция монотонӣ камшаванда мешавад (расми 5, а).

Мисоли 1. Чанд хосияти $y = \frac{k}{x}$ (дар ин ҷо $k \neq 0$)-ро меорем.

1. Азбаски касри $\frac{k}{x}$ дар ҳеҷ ягон қимати x ба нул табдил намешавад, пас функцияи $y = \frac{k}{x}$ нулҳо надорад.



Расми 5, а

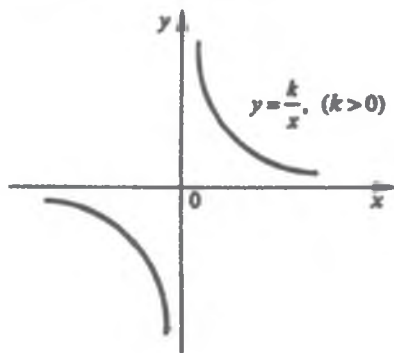
2. Агар $k > 0$ бошад, касри $\frac{k}{x}$ ҳангоми $x > 0$ будан мусбат ва ҳангоми $x < 0$ будан манфӣ аст, яъне ҳангоми $x > 0$ будан $y > 0$ ва ҳангоми $x < 0$ будан $y < 0$ аст.

3. Функсияи $y = \frac{k}{x}$ ҳангоми $k > 0$ будан, дар фосилаҳои $(-\infty; 0)$ ва $(0; +\infty)$ функсияи камшаванда аст ва ҳангоми $k < 0$ будан, дар ин фосилаҳо функсия

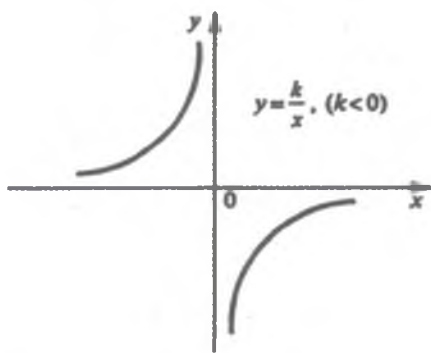
афзуншаванда аст (ниг. ба расмҳои 5 б, в).

Мисоли 2. Бигузор, функсияи $y = f(x)$ бо тарзи графикӣ, масалан, дар порчаи $[-3; 10]$ дода шуда бошад (расми 5, г).

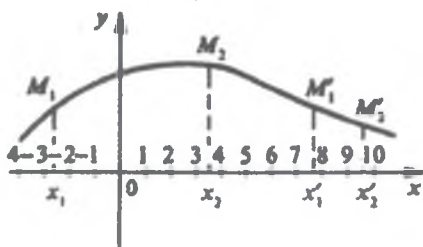
Ҳангоми ба тарафи рост ҳаракат кардани нуқтаи тири абсисса, ки ба аргументи функсия мувофиқ меояд, графики функсия дар фосилаи $(-3; 4)$ фақат боло мебарояд ва дар фосилаи $(4; 10)$ фақат поён мефурояд. Дар бораи функсияе, ки графикаш дар фосилаи



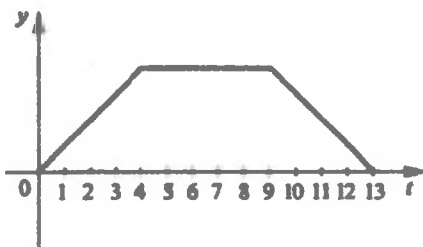
б)



в)



г)



д)

Расми 5

муайян фақат боло мебарояд мегуянд, ки ин функция дар ҳамин фосила афзуншаванда мебошад ва дар бораи функцияе, ки график дар фосилаи муайян фақат поён мефурояд, мегуянд, ки ин функция дар ҳамин фосила камшаванда мебошад.

Функцияи додашударо дар фосилаи $(-3; 4)$ дида мебароем. Дар графики он ду нуктаи дилхохи $M_1(x_1; y_1)$ ва $M_2(x_2; y_2)$ -ро интихоб мекунем. Абсисса ва ординатаи онҳоро муқоиса карда мебинем, ки агар $x_2 > x_1$ бошад, он гоҳ $f(x_2) > f(x_1)$ мешавад.

Агар ҳамон функцияро дар фосилаи $(4; 10)$ муоина намоем, он гоҳ барои ҳар гуна ду нуктаи график $M_1^*(x_1^*; y_1^*)$ ва $M_2^*(x_2^*; y_2^*)$ аз нобаробарии $x_2^* > x_1^*$ нобаробарии $f(x_2^*) > f(x_1^*)$ ҳосил мешавад. Пас, дар фосилаи $(4; 10)$ функция камшаванда мебошад.

Мисоли 3. Нишон медиҳем, ки функцияи $\varphi(x) = \sqrt{x}$ дар нимпорчаи $[0; \infty)$ афзуншаванда аст.

Бигузор, x_1 ва x_2 ададҳои гайриманфии дилхоҳ бошанд ва дар айни ҳол $x_2 > x_1$.

Фарқи $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$ -ро дида баромада, муқаррар мекунем, ки он мусбат аст, яъне $\varphi(x_2) > \varphi(x_1)$. Пас, функцияи $\varphi(x)$ дар нимпорчаи $[0; +\infty)$ меафзояд.

Мисоли 4. Фарз мекунем, ки функцияи $y = ax^2 + c$ дар фосилаи $(-\infty; +\infty)$ дода шудааст. Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии онро меёбем.

Азбаски функцияи $y = ax^2 + c$ чуфт ($y(x) = y(-x)$) мебошад, нас онро дар фосилаи $(0; \infty)$ муоина намудан кифоя аст. Бигузор, x_1 ва x_2 ададҳои мусбати дилхоҳ аз ин фосила ва $x_2 > x_1$ бошад. Ҳолатҳои $a > 0$ ва $a < 0$ -ро алоҳида-алоҳида муоина менамоем.

1. $a > 0$. Фарқи $y_2 - y_1 = ax_2^2 + c - ax_1^2 - c = a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$ -ро дида баромада, муайян менамоем, ки он мусбат ($y_2 - y_1 > 0$) $y_2 > y_1$ аст. Пас, функцияи $y = ax^2 + c$ дар фосилаи $(0; +\infty)$ меафзояд. Бо сабаби симметрии будани графики функция нисбат ба тири Oy (ниг. п. 3) он дар фосилаи $(-\infty; 0)$ кам мешавад.

2. $a < 0$. Он гоҳ,

$$y_2 - y_1 = a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)$$

-ро муоина намуда, муайян мекунем, ки $y_2 - y_1 < 0$, аз ин ҷо $y_2 < y_1$. Пас, функция дар фосилаи $(0; \infty)$ кам мешавад.

Мисоли 5. Бигузор, функцияи $y = x^4$ дар фосилаи $(-\infty; \infty)$ дода шуда бошад. Фосилаи афзуншавӣ ва камшавии онро меёбем.

Азбаски функцияи додашуда чуфт мебошад (ниг. п. 3 ба мисоли 2), пас онро дар фосилаи $(0; \infty)$ муоина кардан кифоя аст. Бигузор,

33. Графики функцияро созед ва хосиятҳояшро номбар кунед:
 а) $y=1,5x-3$; в) $y=-4-x$; г) $y=0,5(1-3x)$.
 б) $y=0,6x+5$; г) $y=2x-2$;
34. Функция бо формулаи $f(x)=-13x-78$ дода шудааст. Барои кадом киматҳои x : а) $f(x)=0$; б) $f(x)>0$; в) $f(x)<0$ аст?
35. Графики функцияро созед ва хосиятҳояшро номбар кунед:
 а) $y = \frac{4}{x}$; б) $y = -\frac{5}{x}$.

Машиқҳо барои такрор

36. Муодилаҳоро ҳал кунед:
 а) $\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = 14$; б) $\frac{5(x-2)}{x+2} - \frac{2(x-3)}{x+3} = 3$.
37. $f(x) = \frac{2+3x}{2-3x}$. Ёбед: $f(0)$ ва $f(1)$ -ро.
38. Ҳисоб кунед: а) $\left[6 - 4 \cdot \left(\frac{5}{16}\right)^0\right]^{-2}$; б) $\frac{1}{11+2\sqrt{30}} + \frac{1}{11-2\sqrt{30}}$.
39. Ифодаро сода кунед:
 а) $(2a-3ab)^2 - (3a-2ab)^2$; б) $(2a-3) \cdot (2a+3)^2 - 8a^3 + 27$.
40. Аз фурудгоҳ дар як вақт ба чойи муқарраршуда, ки масофааш 1600 км буд, ду тайёра парвоз намуданд. Суръати яке аз тайёраҳо аз дигараш 80 км/соат зиёд буд, бинобар ин вай як соат пеш ба чойи муқарраршуда омада расид. Суръати ҳар яке аз тайёраҳоро муайян кунед.

§2. СЕАЪЗОГИИ КВАДРАТӢ ВА ҶУДОКУНИИ ОН БА ЗАРБКУНАНДАҶО

5. Ҷудо кардани квадрати пурра аз сеаъзогии квадратӣ

Сеаъзогии квадратӣ нисбат ба бузургии тағйирёбандаи x гуфта ифодаи намуди ax^2+bx+c -ро меноманд, ки дар он a , b ва c ададҳо буда, $a \neq 0$ мебошад.

Ҳангоми ҳал кардани масъалаҳо баъзан сеаъзогии квадратии ax^2+bx+c -ро ба намуди

$$a(x-m)^2+n^2 \quad (1)$$

(ки дар ин ҷо m ва n ададҳо мебошанд) навиштан муфид аст.

Табдилдиҳие, ки ба баробарии (1) меорад, *тарзи ҷудо кардани дуаъзогӣ ё квадрати пурра аз сеаъзогии ax^2+bx+c ном дорад*.

Схемаи умумии ҳосил кардани баробарии (1)-ро барои сеаъзогии квадратӣ баён мекунем.

Сеаъзогии квадрати ax^2+bx+c -ро ба таври

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

менависем. Ифодаи $\frac{b}{a}$ -ро дар намуди $2\frac{b}{2a}x$ (дучандаи ҳосили

зарби $\frac{b}{2a}$ бар x) тасвир карда, ҳосил мекунем:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}\right).$$

Ба ифодаи дар дохили қавси қисми рост буда $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ ҷамъ ва тарҳ мекунем:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right].$$

Акнун баробарии $x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ -ро истифода карда сеаъзогии квадрати ба намуди зерин менависем:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

$$\text{Ҳамин тавр, } ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]. \quad (2)$$

Баробарии ҳосил кардани (2)-ро бо (1) муқоиса карда мебинем, ки

$$m=\frac{b}{2a} \text{ ва } n^2=-\frac{b^2-4ac}{4a^2} \text{ аст.}$$

Эзоҳ. Дар синфи 8 ҳангоми ҳосил кардани формулаи решаи муодилаи квадрати $ax^2+bx+c=0$ айнан чунин табдилдиҳиҳоро гузаронида будем (ниг. ба китоби дарсӣ, боби III, пункти 28). Яъне, баъди ҳосил кардани (2) барои решаҳои муодила ҳангоми $a\neq 0$ будан формулаи маълуми

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ ҳосил шуда буд.}$$

Мисоли 1. Аз сеаъзогии квадрати $\frac{1}{4}x^2-x+2$ квадрати пур-раро ҷудо мекунем.

Ҳал. Зарбшавандаи $\frac{1}{4}$ -ро аз қавс мебарорем:

$$\frac{1}{4}x^2-x+2=\frac{1}{4}(x^2-4x+8).$$

Ифодаи дохили қавсро табдил медиҳем:

$$\frac{1}{4}x^2 - x + 2 = \frac{1}{4}[(x-2)^2 + 4] = \frac{1}{4}(x-2)^2 + 1.$$

Пас, $\frac{1}{4}x^2 - x + 2 = \frac{1}{4}(x-2)^2 + 1.$

Мисоли 2. Аз сеаъзогии $-2x^2 - 4x + 5$ бо ёрии (2) квадрати пур-раро чудо мекунем

$$\begin{aligned} -2x^2 - 4x + 5 &= -2\left(x^2 + 2x - \frac{5}{2}\right) = -2\left(x^2 + 2x + 1 - 1 - \frac{5}{2}\right) = \\ &= -2\left[(x^2 + 2x + 1) - 1 - \frac{5}{2}\right] = -2\left[(x+1)^2 - \frac{7}{2}\right] = -2(x+1)^2 + 7. \end{aligned}$$

Мисоли 3. Сеаъзогии $\frac{x^2}{3} - 5x + 7$ -ро ба намуди (2) меорем:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{3} - 5x + 7 &= \frac{1}{3}(x^2 - 15x + 21) = \frac{1}{3}\left(x^2 - 2 \cdot \frac{15}{2} \cdot x + 21\right) = \frac{1}{3} \\ \left(x^2 - 2 \cdot \frac{15}{2} \cdot x + \frac{225}{4} - \frac{225}{4} + 21\right) &= \frac{1}{3}\left[\left(x - \frac{15}{2}\right) - \frac{141}{4}\right] = \frac{1}{3}\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 - \frac{47}{4}; \end{aligned}$$

?

1. Таърифи сеаъзогии квадратиро оред. Сеаъзогии квадратӣ чандто реша дошта метавонад? 2. Аз сеаъзогии квадратӣ дуаъзогиرو чӣ тавр чудо кардан мумкин аст? Инро дар мисоли x^2+4x+1 нишон диҳед.

Дар ифодаҳои зерин квадрати пурра чудо карда шавад (41-42):

41. а) $x^2-16x-16$; б) $x^2-8x-65$; в) $3x^2+4x+3$; г) x^2-6x+8 .

42. а) $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 16$; б) $x^2+6x+10$; в) x^2-2x-2 ; г) x^2-2x .

43. Сеаъзогиҳои квадратии $x^2-6x+11$ ва $-x^2+20x-110$ дода шудаанд.

Исбот кунед, ки барои дилҳо x сеаъзогии якум қимати манфӣ ва сеаъзогии дуюм қимати мусбат қабул намекунад.

44. Исбот кунед, ки барои қимати дилҳо x сеаъзогии квадратӣ:

а) $x^2-6x+10$ қимати мусбат;

б) $5x^3-10x+5$ қимати гайриманфӣ;

в) $-x^2+20x-100$ қимати гайримусбат;

г) $-2x^2+16x-33$ қимати манфӣ қабул мекунад.

45. Аз сеаъзогии квадратӣ дуаъзогиرو чудо кунед:

а) x^2-4x+1 ; б) x^2+2x-1 ; в) $-2x^2-6x-3,5$.

Мишқҳо барои тақрор

46. Муодилаи квадратиро ҳал кунед:

а) $2x^2-5x-3=0$;

б) $3x^2-8x+5=0$;

в) $36x^2-12x+1=0$.

47. Қайқ дар қўл 12 км шино карда, баъд ба муқобили самти ҳаракати оби дарё 11 км ҳаракат кард. Қайқ ба ҳамаи роҳ 1 соат вақт сарф кард. Суръати ҷараёни оби дарё 2 км/соат аст. Суръати ҳаракати қайқро дар қўл ёбед.

48. Соҳаи муайянии функцияро ёбед:

а) $y = \frac{5}{x-7}$

б) $y = \frac{19}{2x+72}$

6. Ба зарбкунандаҳо ҷудо кардани сеаъзогии квадратӣ

Дар синфи 7 амалиёти тасвири бисёраъзогиро дар намуди ҳосили зарби дуаъзогиҳо ҷудо кардани он номида будем. Дар ҳамон ҷо нишон дода будем, ки ин амалиёт бо тарзҳои аз қавс баровардани зарбкунандаи умумӣ, ғуруҳбандӣ ва омехта амалӣ карда мешавад. Акнун, як тарзи дигари ба зарбкунандаҳо ҷудо карданро муоина менамоем, ки он ба муайян будани решаҳои (нулҳои) бисёраъзогӣ таъяс мекунад. Ин тарзро дар мисоли сеаъзогии квадратӣ баён менамоем.

Хулоса. масъалаи зеринро мегузорем: коэффитсиентҳои сеаъзогии квадратии ax^2+bx+c ҷӣ гуна бояд бошанд, то ки онро дар намуди ҳосили зарби $(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)$, ки дар ин ҷо $a_1, b_1, a_2, b_2, (a_1 \neq 0, a_2 \neq 0)$ ададҳои ҳақиқанд, ифода кардан мумкин бошад? Яъне баробарии

$$ax^2+bx+c=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2) \quad (1)$$

ҷой дошта бошад.

Фарз мекунем, ки баробарии (1) дуруст аст. Қисми ростии (1) ҳангоми $x = -\frac{b_1}{a_1}$ ва $x = -\frac{b_2}{a_2}$ будан ба нул баробар мешавад, яъне дар ин ҳолат ададҳои $-\frac{b_1}{a_1}$ ва $-\frac{b_2}{a_2}$ решаҳои муодилаи $ax^2+bx+c=0$ мебошанд.

Бинобар ин, дискриминанти сеаъзогии квадратии ax^2+bx+c , ки ба b^2-4ac баробар аст, бояд адади гайриманфӣ бошад.

Фарз мекунем, ки дискриминанти сеаъзогии квадратӣ $D=b^2-4ac$ гайриманфӣ аст. Он гоҳ, ин сеаъзогӣ решаҳои ҳақиқии x_1 ва x_2 -ро дорад. Теоремаи Виетро истифода карда ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a[x^2 - (x_1 - x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2] = \\ &= a[(x^2 - x_1 \cdot x) - (x_2 \cdot x - x_1 \cdot x_2)] = a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = \\ &= a(x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

Ҳамин тавр, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Коэффициенти a -ро ба яке аз зарбшавандаҳои ҳаттӣ дохил кардан мумкин аст.

Масалан, $a(x - x_1)(x - x_2) = (ax - ax_1)(x - x_2)$. Натиҷаҳои дар боло овардашударо ба намуни теоремаи зерин ҷамъбаст менамоем.

Теорема. Сеаъзогии квадратии $ax^2 + bx + c$ -ро фақат дар ҳама ҳолат дар шакли ҳосили зарби зарбшавандаҳои ҳаттӣ бо коэффициентҳои ҳақиқӣ навиштан мумкин аст, агар дискриминанти он ғайриманфӣ бошад (яъне, агар сеаъзогӣ дорои решаҳои ҳақиқӣ бошад).

Эзоҳ. Умуман, агар дараҷаи бисёраъзогӣ ба миқдори решаҳо баробар бошад, он гоҳ зарбкунандаҳо, ки аз дуаъзогиҳои ҳаттӣ иборатанд, ҷудо карда мешавад. Дар айни ҳол ҳар як решаи бисёраъзогӣ решаи дуаъзогии ҳаттӣ аст ва баръакс.

Масалан:

$$x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x - 1)(x + 1)(x - 1)(x + 1);$$

$$2x^3 + 5x^2 + x - 2 = (2x - 1)(x + 1)(x + 2).$$

Мисоли 1. Сеаъзогии квадратии $6x - x - 1$ -ро ба зарбкунандаҳои ҳаттӣ ҷудо мекунем.

Ҳал. Решаҳои ин сеаъзогии квадратӣ $x_1 = \frac{1}{2}$ ва $x_2 = \frac{1}{3}$ мебошанд.

$$\text{Бинобар ин } 6x^2 - x - 1 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = (2x - 1)(3x + 1).$$

Мисоли 2. Сеаъзогии квадратии $x^2 + x + 1$ -ро ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем.

Ҳал. Дискриминанти ин сеаъзогии квадратӣ манфӣ мебошад: $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$. Пас, сеаъзогии квадратӣ реша надорад. Аз ҳамин сабаб аз рӯи теорема он ба зарбкунандаҳо ҷудо намешавад.

Мисоли 3. Қасри $\frac{2x^2 - 7x + 3}{6x^2 - 11x + 4}$ -ро ихтисор мекунем.

Ҳал. Барои ин ифодаҳои дар сурат ва махраҷи қаср бударо ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем. Муодилаҳои квадратии $2x^2 - 7x + 3 = 0$ ва $6x^2 - 11x + 4 = 0$ -ро ҳал карда мебинем, ки адалҳои $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 3$ ва $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ решаҳои ин муодилаҳо мебошанд. Пас, мувофиқи теорема навишта метавонем:

$$2x^2 - 7x + 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 3) = (2x - 1)(x - 3),$$

$$6x^2 - 11x + 4 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{4}{3}\right) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 3\left(x - \frac{4}{3}\right) = (2x - 1)(3x - 4).$$

Ҳамин тарик, $\frac{2x^2-7x+3}{6x^2-11x+4} = \frac{(2x-1)(x-3)}{(2x-1)(3x-4)} = \frac{x-3}{3x-4}$.

Ҳолатҳое имконпазиранд, ки агар дар каср ба ҷойи тағйирёбандаи сеаъзогии квадратӣ ягон қимат гузорем, сурат ва махраҷи он ба нул баробар мешавад. Дар ин гуна ҳолатҳо сеаъзогии квадратиро ба зарбкунандаҳо ҷудо намудан ба мақсад мувофиқ аст.

Мисоли 4. Қимати $\frac{3x^2-3x-6}{2x^2+2x-12}$ -ро баъди содакунии ифода ҳангоми $x=2$ будан, меёбем.

Ҳал. Агар бевосита дар ифода $x=2$ гузорем, он гоҳ сурат ва махраҷ ба нул мубаддал мешавад. Ифодаҳои дар сурат ва махраҷ бударо ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем. Муодилаҳои квадратии $3x^2-3x-6=0$ ва $2x^2+2x-12=0$ -ро ҳал намуда, меёбем: $x_1=-1$; $x_2=2$ ва $x_1=2$; $x_2=-3$ решаҳои онҳо мешаванд.

Ҳамин тавр: $\frac{3x^2-3x-6}{2x^2+2x-12} = \frac{3(x-2)(x+1)}{2(x-2)(x+3)} = \frac{3(x+1)}{2(x+3)} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{9}{10}$.

Мисоли 5. Қимати $\frac{5x^2-5}{6x^2+6x-12}$ -ро баъди содакунии ифода ҳангоми $x=1$ будан, меёбем.

Ҳал. Монанди мисоли 4 муҳокима ронда, ҳосил мекунем:

$5x^2-5=0$, $x=1$; $x=-1$; $6x^2+6x-12=0$; $x=1$; $x_2=-2$.

Ҳамин тавр:

$\frac{5x^2-5}{6x^2+6x-12} = \frac{5(x-1)(x+1)}{6(x-1)(x+2)} = \frac{5(x+1)}{6(x+2)} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 3} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$.

? 1. Теоремаро дар бораи ба зарбкунандаҳо ҷудо кардани сеаъзогии квадратӣ, ки дорои решаҳо мебошад, баён кунед. 2. Татбиқи теоремаро дар ҳалли мисолҳои мушаххас нишон диҳед.

Сеаъзогии квадратиро ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед (49-53):

49. а) $(x+3)^2-16$; б) $4a^2-x^2+2xy-y^2$; в) $6x^2+24xy+24x^2y^2$.

50. а) $3x(x-3)-x+3$; б) $m(m-1)+(1-m)^2$; в) x^2+x-2 .

51. а) $4a^2(b^2-1) + 4b^2(1-b^2)$; б) $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$; в) $-y^2+16y-15$.

52. а) $2x^2-5x+3$; б) $2x^2+2x+\frac{1}{2}$; в) $-9x^2+12x-4$; г) $16a^2+24a+9$;

53. а) $0,25m^2-2m+4$; б) $-m^2+5m-6$; в) $3x^2+5x-2$; г) $6x^2-13x+6$.

Касрҳоро ихтисор кунед (54–57):

$$54. a) \frac{3x-12}{x^2+x-20}; \quad б) \frac{2x^2+7x+3}{x^2+3x}; \quad в) \frac{2m^2-7m+3}{2m^2-3m-2}$$

$$55. a) \frac{5a+10}{2a^2+13a+18}; \quad б) \frac{b^2-8b+15}{b^2-25}; \quad в) \frac{y^2-5y-36}{81-y^2};$$

$$56. a) \frac{4x+4}{3x^2+2x-1}; \quad б) \frac{p^2-11p+10}{20+8p-p^2}; \quad в) \frac{3x^2+16x-12}{10-13x-3x^2};$$

$$57. a) \frac{4x+4}{3x^2+2x-1}; \quad б) \frac{p^2-11p+10}{20+8p-p^2}; \quad в) \frac{2m^2-8}{m^2+6m+8}.$$

Айниятро исбот кунед:

$$58. 10x^2+19x-2=10(x-0,1)(x+2).$$

$$59. 0,5(x-6)(x-5)=0,5x^2-5,5x+15$$

$$60. \text{Қимати касрро хангоми } x=-1; 5, 10 \text{ будан, ёбед: } \frac{4x^2+8x-32}{4x^2-16x};$$

Маишқҳо барои такрор

61. Амалҳоро иҷро кунед:

$$a) (3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}); \quad б) \frac{4\frac{1}{2} \cdot 5\frac{2}{3}}{\frac{6}{4}}; \quad в) \frac{4\frac{1}{4}}{11\frac{1}{3} \cdot 5\frac{1}{4}};$$

62. Муодиларо ҳал кунед:

$$a) x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}; \quad б) \frac{2x-a}{b} = \frac{4x-b}{2x+a}.$$

63. 12%-и адади 120-ро ёбед.

64. Ҳисоб кунед:

$$\left[\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) : \frac{x+y}{2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right] \frac{xy}{(x+y)^2} \text{ хангоми } x = -\frac{1}{2}; y = -2 \text{ будан.}$$

65. Ҳосили зарби ду адади пай дар пайи натуралӣ ба 156 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.

66. $\frac{3}{5}$ -ро дар шакли касри даҳӣ нависед.

67. Амалҳоро иҷро кунед:

$$a) a^{-3} \cdot a^{-5}; \quad б) \left(-\frac{2}{5}a^4x^3y^2 \right) : \left(-\frac{1}{2}a^3xy^2 \right).$$

68. Решаҳои сеаъзогии квадратино ёбед:

$$a) 9x^2-9x+2; \quad б) 0,2x^2+3x-20.$$

69. а) Се дона гулмоҳи 11,3 кг аст. Вазни гулмоҳии якум $\frac{4}{5}$ ҳиссаи вазни дуюм, вазни дуюмаш 70% вазни сеюмро ташкил медиҳад. Вазни ҳар як гулмоҳиро ёбед;
- б) Барои 0,8 тонна гандум ва 1,4 тонна чавдор 505,02 сомони доданд. Агар нархи 1 тонна чавдор аз 1 тон гандум 0,7 камтар сомони бошад, 1 тон чавдор ва 1 тон гандум чанд сомони арзиш дорад?

§ 3. ФУНКСИЯИ КВАДРАТӢ, ХОСИЯТҲО ВА ГРАФИКИ ОН

7. Функцияи квадратӣ ва хосиятҳои он

Дар соҳаҳои гуногуни илм ва техника бо бузургҳои тағйирёбанда дучор мешавем, ки онҳо байни худ бо вобастагии функсионалии намунаш $y=ax^2+bx+c$ алоқаманданд.

Масалан, вобастагии байни диаметри доира d ва масоҳати он S бо формулаи

$$S = \frac{\pi}{4} d^2$$

ифода меёбад.

Мо дар ин мисол бо функцияе дучор шудем, ки онро бо формулаи намунаи $y=ax^2$ (дар ин ҷо x - тағйирёбандаи новобаста ва a - ягон адад) ифода кардан мумкин аст. Боз як мисол аз физика меорем.

Масофае, ки ҷисм ҳангоми ҳаракати ростхаттаи мунтазам тезшаванда тай мекунад, бо формулаи

$$s = \frac{at^2}{2} + v_0 t + s_0$$

ифода карда мешавад. Дар ин ҷо t - вақт, s - роҳи тайшуда, ибтидоӣ роҳ v_0 - суръати ибтидоӣ, a - суръатнокӣ мебошад.

Мисоли дар боло овардашуда мисоли функцияи намунаи $y=ax^2+bx+c$ мебошад.

Таъриф. Функцияе, ки бо формулаи намунаи $y=ax^2+bx+c$ ифода карда мешавад, *функцияи квадратӣ* номида мешавад (дар ин ҷо x - тағйирёбандаи новобаста, a , b ва c - ададҳо ва $a \neq 0$).

Графики функцияи квадрати $y=ax^2+bx+c$ -ро **парабола** меноманд. Баъзан зери мафҳуми парабола ҳуди функцияи квадрати ро дар назар доранд.

Мо омӯзиши хосиятҳои функцияи квадрати аз мавриди ҷузъӣ, аз функцияи $y=ax^2$ ҳангоми $a>0$ будан, оғоз менамоем:

1. Агар $x=0$ бошад, $y=0$ мешавад.
2. Агар $x \neq 0$ бошад, $y>0$ мешавад.

3. Функцияи чуфт мебошад, зеро $y(x)=y(-x)$ аст. Графики он нисбат ба тири Oy симметрии мебошад ё чӣ тавре мегӯянд, он тир тири симметрияи функция аст. Муодилаи ин тир $x=0$ мебошад.

4. Функция дар нимфосилаи $(-\infty; 0]$ кам мешавад ва дар нимпорчаи $[0; \infty)$ меафзояд.

5. Нимпорчаи $[0; \infty)$ соҳаи қиматҳои функция мебошад.

Хосиятҳои 1–3 маълум аст. Хосияти 4-ро исбот мекунем.

Фарз мекунем, ки x_1, x_2 ду қимати аргумент (дар айни ҳол $x_2 > x_1$ аст) ва y_1, y_2 , қиматҳои ба онҳо мувофиқи функция мебошанд. Фарқи $y_2 - y_1$ -ро тартиб медиҳем:

$$y_2 - y_1 = ax_2^2 - ax_1^2 = a(x_2^2 - x_1^2) = a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1).$$

Азбаски $a > 0$ ва $x_2 - x_1 > 0$ аст, пас аломати ҳосили зарби $a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)$ бо аломати зарбшавандаи $x_2 + x_1$ як хел аст. Агар ададҳои x_2 ва x_1 ба фосилаи $(-\infty; 0)$ тааллуқ дошта бошанд, он гоҳ ин зарбшаванда манфӣ аст. Агар ададҳои x_2 ва x_1 ба нимпорчаи $[0; \infty)$ тааллуқ дошта бошанд, он гоҳ зарбшавандаи $x_2 + x_1$ мусбат аст. Дар мавриди якум $y_2 - y_1 < 0$, яъне $y_2 < y_1$ аст; дар мавриди дуюм $y_2 - y_1 > 0$, яъне $y_2 > y_1$ аст. Пас, функция дар нимфосилаи $(-\infty; 0]$ кам мешавад ва дар нимпорчаи $[0; \infty)$ меафзояд.

Акнун, хосиятҳои функцияи $y = ax^2$ -ро ҳангоми $a < 0$ будан, баён мекунем.

1. Агар $x=0$ бошад, $y=0$ мешавад.

2. Агар $x \neq 0$ бошад, $y < 0$ мешавад.

3. Функцияи чуфт аст. Графики он нисбат ба тири Oy симметрии мебошад (дар ин ҳолат мегӯянд, ки тири ордината Oy тири симметрии аст).

4. Функция дар нимфосилаи $(-\infty; 0]$ меафзояд ва дар нимпорчаи $[0; \infty)$ кам мешавад.

5. Нимпорчаи $(-\infty; 0]$ соҳаи қиматҳои функция мебошад.

Хосияти 4-ум мисли мавриди $a > 0$ исбот карда мешавад.

Аз хосиятҳои номбаршуда натиҷа мебарояд, ки ҳангоми $a > 0$ будан, шохаҳои парабола $y = ax^2$ (қисмҳои график, ки ба фосилаҳои $(-\infty; 0)$ ва $(0; \infty)$ рост меоянд) ба боло ва ҳангоми $a < 0$ будан, поён раван аст. Тири Oy тири симметрияи парабола мебошад. Нуқтаҳои буриши параболаю тири симметрияи онро қуллаи парабола меноманд. Қуллаи параболаи $y = ax^2$ бо ибтидои координатаҳо ҳамчун аст.

Эзоҳ. Агар функцияи квадратӣ бо формулаи $y = ax^2 + y$ дода шуда бошад, он гоҳ хосиятҳои он ба хосиятҳои 1–5-и функцияи $y = ax^2$ монанданд.

Масалан, ҳангоми $a > 0$ будан, вай дар фосила $(0; \infty)$ афзуншаванда ва дар $(-\infty; 0)$ камшаванда буда, хати рости $x=0$ яъне тири Oy

тири симметрияш мебошад. Куллааш дар нуктаи $(0; \gamma)$, яъне дар тири ордината ҷойгир аст. Айнан, агар функцияи $y=a(x-\beta)^2+\gamma$ -ро (a, β, γ) -ададҳои ҳақиқӣ)-ро муоина намоем, мебинем, ки хати ростии $x=b$ тири симметрии он буда, куллааш дар нуктаи $(\beta; \gamma)$ ҷойгир аст. Шохаҳои парабола ба боло равонанд, агар $a>0$ бошад.

Акнун, ҳосиятҳои функцияи $y=ax^2+bx+c$ -ро баён мекунем. Чунонки дар §2 п.5 қайд шуд, функцияи $y=ax^2+bx+c$ -ро ба намуди

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

навиштан мумкин аст. Баробарии охирино ҷунин менависем:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

ки дар ин ҷо $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Мулоҳизаҳои дар зох овардашударо ба эътибор гирифта, ба ҳулоса меоем: **графики функцияи $y=ax^2+bx+c$ параболаест, ки куллааш дар нуктаи $(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a})$ мебошад. Хати ростии $x = -\frac{b}{2a}$ тири симметрии ин парабола аст. Шохаҳои парабола ҳангоми $a>0$ ба боло ва ҳангоми $a<0$ ба поён равонанд.**

Параболаи $y=ax^2+bx+c$ бо тири Oy нуктаи буриш дорад. Абсиссаи нуктаи буриш ба нул ва ординатааш ба c баробар аст. Агар дар ифодаи ax^2+bx+c , $x=0$ гузорем, ординатаи нуктаи буриш ҳосил мешавад. Масалан, нуктаи буриши параболаи $y=x^2+4x+3$ ва тири Oy дорои координатаҳои $(0; 3)$ аст.

На ҳар гуна параболаи намуди $y=ax^2+bx+c$ бо тири абсисса Ox нуктаи буриш дорад. Агар дискриминант $D=b^2-4ac$ мусбат бошад, он гоҳ муодилаи $ax^2+bx+c=0$ ду решаи ҳақиқии гуногун дорад:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Дар ин маврид параболаи $y=ax^2+bx+c$ тири Ox -ро дар ду нуктаи абсиссахояшон, мувофиқан, x_1 ва x_2 мебурад. Чунончӣ, барои сеъззгии квадрати x^2+4x+3 , $D=16-12>0$. Ин сеъззгии квадратӣ ду реша дорад: x^2+4x+3 . Бинобар ин, параболаи x^2+4x+3 тири Ox -ро дар ду нукта мебурад, ки абсиссахояшон ба -1 ва -3 баробар аст.

Агар $D=b^2-4ac=0$ бошад, муодилаи $ax^2+bx+c=0$ як решаи ҳақиқӣ дорад: $x=-\frac{b}{2a}$. Дар ин маврид муодилаи параболаро ба намуди $y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ навиштан мумкин аст.

Ординатаи нуқтаи абсиссааш $-\frac{b}{2a}$ ба нул баробар аст. Дар дигар нуқтаҳои атрофи $-\frac{b}{2a}$ буда y мусбат мебошад. Дар ин ҳолат меъёнд, ки нуқтаи $-\frac{b}{2a}$ нуқтаи расиши парабола бо тири абсисса Ox аст. Масалан, барои соаъзогии квадратии $x^2-2x+1=0$ аст. Муодилаи $x^2-2x+1=0$ як решаи $x=1$ дорад. Бинобар ин, нуқтаи абсиссааш 1 нуқтаи расиши параболаи $y=x^2-2x+1$ ба тири Ox мебошад.

Агар $D=b^2-4ac<0$ бошад, муодилаи $ax^2-bx+c=0$ решаҳои ҳақиқӣ надорад. Дар ин маврид парабола тири Ox -ро намебурад. Масалан, барои соаъзогии $x^2+2x+3=0$ $D=-8<0$. Муодилаи $x^2+2x+3=0$ решаҳои ҳақиқӣ надорад. Параболаи $y=x^2+2x+3$ тири Ox -ро намебурад.

Акнун, якчанд мисолро, ки онҳо гуфтаҳои болоро равшан мекунанд, меорем.

Мисоли 1. Куллаи параболаи $y=2x^2-4x+5$ -ро меёбем.

Ҳал: $y = 2x^2 - 4x + 5 = 2\left(x^2 - 2x + \frac{5}{2}\right) = 2(x-1)^2 + 3$.

Ҷавоб: Куллаи парабола дар нуқтаи (1; 3) ҷойгир аст.

Мисоли 2. Нуқтаҳои буриши параболаи $y=3x^2-9x+6$ -ро бо тирҳои координатаҳо меёбем.

Ҳал. Дар параболаи $y=3x^2-9x+6$, x -ро ба 0 баробар карда, $y=6$ -ро ҳосил мекунем, баъд y -ро ба 0 баробар карда, муодилаи $3x^2-9x+6=0$ -ро ҳал намуда, решаҳои он $x_1=1$, $x_2=2$ -ро ҳосил менамоем. Параболаи додашуда тири Ox -ро дар нуқтаҳои (1; 0), (2; 0) ва Oy -ро дар нуқтаи (0; 6) мебурад.

Мисоли 3. Функцияи квадратии $y=2x^2-2x+12$ дода шудааст. Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавӣ онро меёбем.

Ҳал. Функцияи квадратиро ба намуди $2x^2-2x+12=2(x-0,5)^2+11,5$ табдил медиҳем. $x=0,5$ - тири симметрияи он буда, куллааш дар нуқтаи (0,5; 11,5) ҷойгир аст. Азбаски $a=2>0$ мебошад, бинобар ин шохаҳои парабола ба боло равонанд. Вай дар фосилаи (0,5; ∞) афзуншаванда ва дар фосилаи ($-\infty$; 0,5) камшаванда мешавад.



1. Таърифи функцияи квадратиро баён кунед. 2. Хосиятҳои функцияи квадратии $y=ax^2$ -ро: а) ҳангоми $a>0$ будан; б) ҳангоми $a<0$ будан, баён кунед. 3. Хосиятҳои функцияи квадратии $y=ax^2+bx+c$ - ро баён кунед.

70. Самти равиши шохаҳои параболаро муайян намоед.

а) $y = -7x^2 + 6x + 1$; в) $y = 3x^2 + 2x$;
б) $y = x^2 - 3x + 1$; г) $y = -x^2 + 4x + 8$.

71. Координатаҳои қулла ва муодилаи тири симметрии функсияро ёбед.

а) $y = 3x^2 + 4$; в) $y = 3x^2 - 12x$ г) $y = 2x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{8}$
б) $y = -2(x-2)^2 + 3$; г) $y = -5x^2 + 4x + 1$; д) $y = -7x^2 + 6x + 1$.

72. Нулҳои функсияро ёбед:

а) $y = 3x^2 - 7x + 4$; в) $y = 3x^2 - 13x + 14$;
б) $y = 5x^2 - 8x + 3$; г) $y = 2x^2 - 9x + 10$.

73. Нуқтаи буриши параболаро бо тири ордината ёбед:

а) $y = 5x^2 - 7x + 1$; в) $y = -x^2 + 4$;
б) $y = 3x^2 + x + 2$; г) $y = x^2 - 3x + 5$.

74. Магар парабола тири абсиссаро мебурад? Агар бурад, координатаҳои нуқтаҳои буришро ёбед.

а) $y = 2x^2 - 5x - 3$; в) $y = 5x^2 + 9x + 4$;
б) $y = 3x^2 - 2x + 1$; г) $y = 36x^2 - 12x + 1$.

75. Координатаҳои нуқтаи расиши параболаро муайян кунед:

а) $y = 2x^2 - 12x + 18$; в) $y = x^2 - 2x + 1$;
б) $y = -x^2 + x - 0,25$; г) $y = x^2 - 4x - 1$.

76. Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии функсияро ёбед?

а) $y = -x^2 + x$; в) $y = -2x^2 + 12x - 19$; г) $y = 3(x+1)^2$;
б) $y = 3x^2 - 7x + 4$; г) $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$; д) $y = -2x^2 + 4x + 4$.

Машиқҳо барои тақрор

77. Касрҳоро ихтисор кунед:

а) $\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$; б) $\frac{y^2-x^2}{(x+y)^2}$; в) $\frac{m-n}{(n-m)^2}$.

78. Муодиларо ҳал кунед:

а) $\frac{2x-1}{2x+1} = \frac{2x+1}{2x-1} + \frac{8}{1-4x^2}$; б) $\frac{12}{1-9x^2} = \frac{1-3x}{1+3x} + \frac{1+3x}{3x-1}$.

79. Парвиз ва Фирдавс якҷоя 100 саҳифа китоб хонданд. Агар маълум бошад, ки Парвиз аз Фирдавс 4 саҳифа камтар китоб хондааст, Парвиз ва Фирдавс чандсаҳифагӣ китоб хондаанд?

80. Сеаъзогии квадратино ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед:

а) $-y+6y-5$; б) $-x^2-5x+6$; в) $2x^2-5x+3$; г) $5y^2+2y-3$.

8. Экстремуми функцияи квадратӣ

Чӣ тавре дидем, соҳаи муайянии функцияи квадратии $y=ax^2+bx+c$ маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ $R=(-\infty; \infty)$ аст. Соҳаи қиматҳояш низ ҳамин ададҳо мебошанд.

Таъриф. Қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функцияро қимати экстремалӣ ё экстремуми он меноманд. Нуқтаҳое, ки дар он ин қиматҳо қабул карда мешаванд, нуқтаҳои экстремалӣ ё экстремал ном доранд.

Тарзи ёфтани экстремум ва экстремалҳои функцияи дилхоҳро истисно карда, дар ин пункт мо танҳо тарзи ёфтани онҳоро барои функцияи квадратӣ нишон медиҳем. Омӯзишро аз ҳолати хусусӣ сар мекунем.

Бигзор, дар формулаи функция коэффициент $b=0$ бошад, яъне $y=ax^2+c$ аст. Аз сабаби чуфт будани функция муоинаи он дар фосилаи $(0; \infty)$ кифоя аст.

а) $a>0$ функция афзуншаванда аст. Инчунин, ҳар гуна қимати он аз адади c хурд нест, барои ҳар гуна x ; $ax^2+c \geq c$ чунки қимати ифодаи ax^2 адади ғайриманфӣ аст. Аз ин ҷо бармеояд, ки қимати хурдтарини функция ба c баробар буда, ин қиматро функция дар нуқтаи $x=0$ соҳиб мешавад. Функция қимати калонтарин надорад, ки он аз афзуншаванда буданаш бармеояд.

Ҳамин тариқ, агар бо $y_{\min}=c$; $x=0$ ишорат кунем.

Ё ҳар ду баробариро ҳамчоя карда ин тавр навиштан мумкин аст: $y_{\min}=y(0)=c$; ($\min$ решаи калимаи латинии **minimum**, ки маънояш хурдтарин аст).

б) $a<0$ функцияи $y=ax^2+c$ дар ин маврид камшаванда буда, қиматаш барои ҳар гуна қимати аргументи x аз қимати c зиёд нест, чунки қимати ифодаи ax^2 барои ҳар гуна қимати аргумент адади ғайримусбат аст.

Агар $x=0$ бошад, $y=c$ аст. Пас, қимати калонтарини функция ба адади c баробар аст. Аз сабаби камшаванда буданаш функция қимати хурдтарин надорад.

Ҳамин тариқ, агар бо $y_{\min}$ қимати калонтарини функция ва бо $x_{\max}$ нуқтаи экстремалиро ишорат намоем, пас

$$y_{\min}=c; x_{\max}=0 \text{ ё } y_{\min}=y(0)=c$$

($\max$ – решаи калимаи **maximum**, ки маънояш калонтарин мебошад).

Ҳар ду ҳолатро ҳамчоя карда, ба хулосаи зерин меоем.

Функцияи $y=ax^2+c$ ҳангоми $a>0$ будан, дорои қимати хурдтарин буда, қимати калонтарин надорад. Ин функция ҳангоми $a<0$ будан, қимати калонтарин дошта, қимати хурдтарин надорад. Дар ҳар ду маврид қимати экстремалӣ ба адади c баробар буда, дар нуқтаи $x=0$ қабул карда мешавад.

Акнун ба ҳолати умумӣ бармегардем, яъне ба функцияи $y=x^2+bx+c$.

Чй тавре дар пункти 5 нишон додем, ҳар гуна функцияи квадратино дар намуди

$$y = ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad (1)$$

навиштан мумкин аст. Мукоисаи (1) бо функцияи $y = ax^2 + c$ нишон медиҳад, ки дар (1) ба ҷойи x ифодаи $x = \frac{b}{2a}$ ва ба ҷойи c ифодаи $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ меояд. Мулоҳизарониҳои дар қисмчаҳои а) ва б)-и боло барои функцияи $y = ax^2 + c$ гузаронидаамонро айнан барои функцияи (1) тақрор карда, чунин натиҷаро ҳосил мекунем, ки он яке аз хосиятҳои асосии парабола мебошад:

А) Функцияи квадратии $y = ax^2 + bx + c$ ҳангоми $a > 0$ будан, қимати хурдтарин дорад. Ин қимат ба $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ баробар буда, дар нуқтаи x , ки барояш $x + \frac{b}{2a} = 0$ ё $x = -\frac{b}{2a}$ аст, ҳосил мешавад. Яъне

$$y_{\min} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}; \quad x_{\max} = -\frac{b}{2a}.$$

Функция қимати калонтарин надорад.

Б) Ҳамин функция ҳангоми $a < 0$ будан, қимати калонтарин дорад.

Ин қимат $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ буда, дар нуқтаи $x = -\frac{b}{2a}$ ҳосил мешавад.

Яъне $y_{\max} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}; \quad x_{\min} = -\frac{b}{2a}$.

Функция қимати хурдтарин надорад.

Э з о ҳ и 1. Натиҷаҳои ҳосилшуда нишон медиҳанд, ки нуқтаи экстремалии функцияи квадратӣ қуллаи парабола (ниг, ба пункти 7) мебошад. Дар оянда, ҳангоми сохтани графики функцияи квадратӣ аз ин натиҷа истифода хоҳем кард.

Э з о ҳ и 2. Қимати хурдтарини функцияро минимум ва қимати калонтаринро максимум ҳам мегӯянд.

М и с о л и 1. Нуқтаи экстремали ва экстремуми функцияи $y = 2x^2 + 3$ -ро меёбем.

Ҳ а л. Барои ёфтани экстремум ва экстремали функция чунин рафтор мекунем. Азбаски функция ҷуфт мебошад, бинобар ин, онро дар фосилаи $(0; \infty)$ муоина намудан кифоя аст. Дар ин ҷо $a = 2 > 0$. Ба ҳамин сабаб функция афзуншаванда мебошад. Азбаски ҳамеша $2x^2 + 3 \geq 3$ аст, пас қимати хурдтарини функция ба 3 баробар буда, функция онро ҳангоми $x = 0$ будан, қабул менамояд. Ҳамин тавр, қимати хурдтарин ё минимуми функция ба 3 баробар аст:

$$y_{\min} = 3, \quad x_{\min} = 0 \quad \text{ё} \quad y_{\min} = y(0) = 3.$$

М и с о л и 2. Экстремум ва экстремали функцияи $y = -3x^2 + 4$ -ро меёбем.

Ҳ а л. Функция дар фосилаи $(0; \infty)$ камшаванда буда, қиматаш барои ҳар гуна қимати x аз 4 калон нест, чунки ифодаи $-3x^2$ барои ҳар гуна қимати x гайримусбат аст. Ҳангоми $x=0$ будан, $y=4$ аст. Пас, қимати калонтарини функция ба 4 баробар аст. Бо сабаби камшаванда буданаш функция қимати хурдтарин надорад.

$$y_{\max}=4, x_{\max}=0 \text{ ё } y_{\max}=y(0)=4.$$

М и с о л и 3. Экстремум ва экстремали функцияи $y=2(x-3)^2+5$ -ро бо ду тарз меёбем.

Ҳ а л. *Тарзи якум.* Қавсро кушода, ҳосил мекунем:

$$y=2x^2-12x+23.$$

Азбаски $a=2>0$ мебошад, бинобар ин функция қимати хурдтарин дорад. Ин қимат ба $-\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{144-184}{8} = \frac{40}{8} = 5$ баробар буда, дар нуқтаи $x = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{4} = 3$ қабул карда мешавад.

$$\text{Ҳамин тарик, } y_{\min}=5; x_{\min}=3.$$

Функция қимати калонтарин надорад.

Тарзи дуюм. Бевосита аз $y=2(x-3)^2+5$ маълум мешавад, ки $x_{\min}=3; y_{\min}=5$ мебошад.

М и с о л и 4. Экстремум ва экстремалҳои функцияи $y=-3x^2+12x-8$ -ро меёбем.

Ҳ а л. Азбаски $a=-3<0$ мебошад, бинобар ин функция қимати калонтарин дорад. Ин қимат $-\frac{b^2-4ac}{4a} = \frac{12^2-4(-3)(-8)}{4(-3)} = \frac{144-96}{-12} = \frac{48}{-12} = -4$ буда, дар нуқтаи $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2(-3)} = 2$ қабул карда мешавад. Яъне $y_{\max}=-4, x_{\max}=2$.

Функция қимати хурдтарин надорад.

Функцияи додашударо ба намуди $y=-3(x-2)^2+4$ нависем, он гоҳ бевосита $y_{\max}=-4, x_{\max}=2$ навишта метавонем.



1. Экстремум ва экстремали функция чист? 2. Функцияи квадратӣ дар кадом ҳолат қимати хурдтарин ва дар кадом ҳолат қимати калонтарин дорад? Магар барои функцияи квадратӣ ҳардуи ин қиматҳо вучуд доранд? 3. Қиматҳои экстремалии функцияи квадратӣ ва экстремали он ба чӣ баробар аст?

81. Кадоме аз функцияҳои зерин қимати калонтарин ва кадомаш қимати хурдтарин доранд:

- а) $y=2x^2+12x+13$; в) $y=x^2+x-6$; г) $y=-2x^2+6x-6$;
 б) $y=-2x^2-4x-5$; г) $y=-0,5x^2+1,5x+2$; д) $y=3x^2-6x+5$;

82. Экстремуми функсияро ёбед:

а) $y=x^2-2x-15$; в) $y=x^2+2x+1$; г) $y=2x^2+2x$;
 б) $y=-x^2+6x-7$; г) $y=-2x^2-4x+1$; д) $y=-3x^2+18x-26$.

83. Экстремали функсияи квадратиро ёбед:

а) $y=2x^2+3$; в) $y=-4x^2+16x-13$; э) $y=-x^2+2x$;
 б) $y=x^2-2$; з) $y=4x^2+4$; д) $y=2x+12x+10$.

84. Экстремум ва экстремали функсияро ёбед:

а) $y=3(x+2)^2-1$; в) $y=2(x+3)^2+1$; э) $y=-4(x-2)^2+1$;
 б) $y=-3(x+2)^2-1$; з) $y=4(x-2)^2-1$; д) $y=3x^2-18x+30$.

Машиқҳо барои такрор

85. Амалҳоро иҷро кунед:

а) $\left(\frac{a}{a+1} + 1\right) : \left(1 - \frac{3a^2}{1-a^2}\right)$; б) $\frac{x^2+4x+3}{3-5} \cdot \frac{x^2-5x}{x+3}$.

86. Муодиларо ҳал кунед:

а) $x^2+12x-64=0$ б) $x^2-4x=45$

87. Самти равиши шоҳаҳои параболаҳоро муайян намоед:

а) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 4x + 10$; б) $y = 5x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{4}{5}$.

88. Аз 3200 нафар аҳолии деҳа 60%-ро коргарон ташкил медиҳанд. Дар деҳа чанд нафар коргар истиқомат дорад?

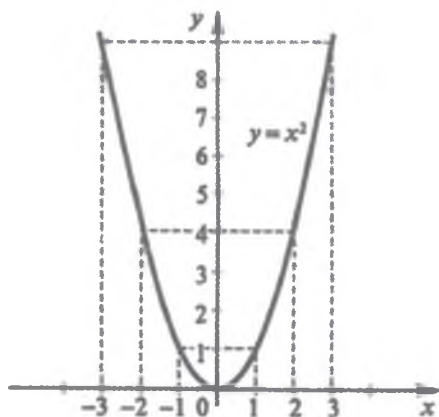
9. Графики функсияи квадратӣ

Дар пункти 2 мафҳуми графики функсияи $y=f(x)$ -ро ҳамчун маҷмӯи нуқтаҳои ҳамворӣ, ки координатаҳояшон $(x; y)$ баробарии $y=f(x)$ -ро қаноат менамоянд, дохил карда будем. Дар пунктҳои пасоянд ҷангоми омӯхтани хосиятҳои функсияи квадратӣ чандин маротиба ба рафтори графики ин функсия ишора кардем. Вале мо то ҳол боре ҳам графики ягон параболаро насохтем. Акнун, ба сохтани графики парабола ё функсияи квадратии $y=ax^2+bx+c$ шуруъ менамоем. Чун ҳамеша аз функсияи квадратии одитарин $y=ax^2$ сар мекунем. Барои ин аз схемаи кашидани графики функсияи формулааш додашуда, ки дар қисми (б)-и пункти 2 баён шудааст, истифода мекунем.

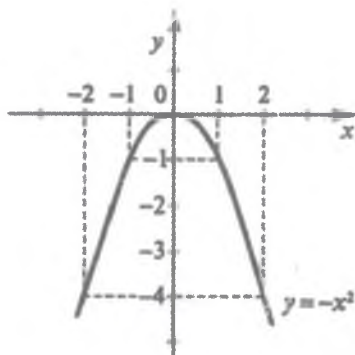
А) Фарз мекунем, ки $a=1$ аст, он гоҳ функсияи квадратӣ намуди $y=x^2$ -ро мегирад. Графики ин функсияро аз рӯи нуқтаҳояш месозем.

Барои ин мақсад чадвали зеринро тартиб медиҳем.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	1	2	3	-	-	-
$y=x^2$	9	4	1	$\frac{1}{4}$	1	4	9	-	-	-



Расми 6



Расми 7

Аз рӯйи координатаҳояшон нуқтаҳоро дар ҳамворӣ сохта, баъд онҳоро бо хати қавҷ мепайвандем. Ин хати қавҷ парабола аст, ки дар расми 6 тасвир шудааст. Параболаи $y=x^2$ хосиятҳои зерин дорад:

Он дар нимҳамвории болоӣ ҷойгир аст. Аз ин ҷо маълум мешавад, ки функсияи $y=x^2$ фақат қиматҳои гайриманфиро қабул менамояд. Шохаҳои парабола ба боло равонаанд. Он дар фосилаи $(-\infty; 0)$ камшаванда шуда, дар $(0; \infty)$ афзуншаванда аст. Парабола дар ибтидои координата бо тири абсисса расиш дорад. Ин нуқта, ки нуқтаи поёнии график аст, қуллаи парабола мебошад.

Тири Oy тири симметрияи ин парабола мебошад, яъне муодилаи тири симметрия хати рост $x=0$ аст. Ин чунин маъно дорад, ки агар графики дар расми 6 тасвиршударо аз рӯйи тири Oy қат наоём, он гоҳ қисми рост ва чапи он ҳамчун мешаванд.

Аз ин ҷо маълум мешавад, ки қимати функсияи $y=x^2$ ҳангоми ивазшавии аломати аргумент тағйир намеёбад, яъне $(-x)^2=x^2$. Ин гуна функсияҳоро функсияи ҷуфт гуфта будем, ки графикашон нисбат ба тири Oy симметрӣ мебошад.

Бигзор, акнун $a=-1$ бошад, яъне $y=-x^2$. Барои соختани графики ин функсия чадвали зеринро тартиб медиҳем:

y	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	...
$y=-x^2$	-9	-4	-1	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-4	-9	...

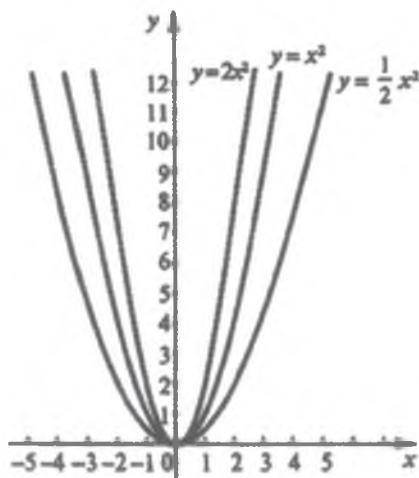
Мисли боло аз рӯйи координатаҳояшон нуқтаҳоро дар ҳамворӣ тасвир намуда, баъд онҳоро бо хати қавҷ пайваस्त мекунем. Дар

натиҷа параболасе ҳосил мешавад, ки шоҳаҳояш поён равананд. Қуллааш (ибтидои системаи координатаҳо) нуқтаи болотарини (қимати калонтарини функсия) он мебошад. Тири симметрияш тири ордината аст (расми 7).

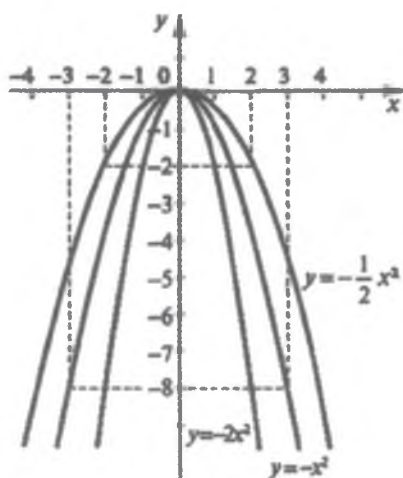
Акнун, графики функсияи $y=ax^2$ -ро мисли графики функсияи $y=x^2$ бо усули «нуқтаҳо» месозем. Аввало, мавридеро мебинем, ки дар он $a>0$ аст. Дар як системаи координатаҳо графики функсияи $y=ax^2$ -ро хангоми $a = \frac{1}{2}; 1; 2$ будан, месозем (расми 8). Дар ҳар се ҳолат ҳам хатҳои қачи ҳосилшуда ба тири ордината симметрӣ буда, дар нимҳамвории болоӣ воқеанд. Шоҳаҳои ин параболоҳо ба боло равананд. Қуллаи умумиашон ибтидои координата ва тири симметрияи ҳар се график тири ордината мебошад. Аз расми 8 намоён аст, ки a ҳар қадар калон бошад, шоҳаҳои параболҳои $y=ax^2$ ҳамон қадар рост ва a ҳар қадар хурд бошад, шоҳаҳо ҳамон қадар паҳн мешаванд, яъне аз тири симметрия бо афзудани аргумент дур мешаванд.

Акнун, мавриди $a<0$ -ро дида мебароем. Дар расми 9 хати қачи $y=ax^2$ хангоми $a = -\frac{1}{2}; -1; -2$ тасвир ёфтааст.

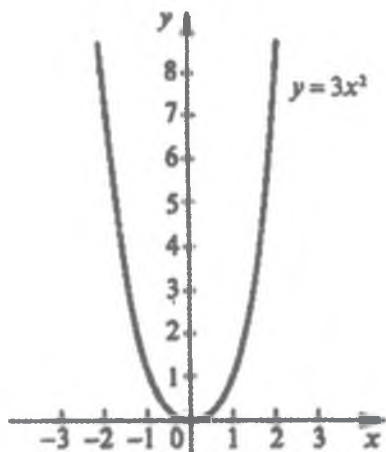
Қуллаи умумии ин параболоҳо (ибтидои системаи координатаҳо) нуқтаи болотарини онҳост. Тири ордината барои ҳар яки ин хатҳо тири симметрия аст. Бузургии мутлақи a ҳар қадар калон бошад, шоҳаҳои параболо ҳамон қадар рост мешаванд; $|a|$ ҳар қадар хурд бошад, шоҳаҳои параболо ҳамон қадар паҳн мешаванд.



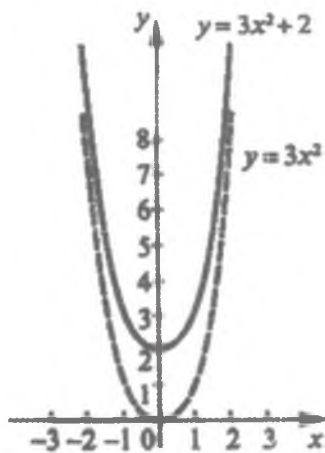
Расми 8



Расми 9



Расми 10, а



Расми 10, б

Графики функцияи $y=ax^2+c$. Графики ин функцияро аз графики функцияи $y=ax^2$ дар натиҷаи қад-қадӣ тири Oy ба боло c воҳид (агар $c>0$ бошад) ё ба поён $-c$ воҳид (агар $c<0$ бошад), параллел кӯчонидан ҳосил кардан мумкин аст.

Мисоли 1. Графики функцияи $y=3x^2+2$ -ро месозем.

Ҳа л. Бо ин мақсад графики функцияҳои $y=3x^2$ ва $y=3x^2+2$ -ро дар як системаи координатаҳо месозем. Аввал чадвали қиматҳои функцияи $y=3x^2$ -ро тартиб медиҳем

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	27	12	3	0	3	12	27	...

ва аз рӯи он график месозем (ниг. ба расми 10, а).

Барои тартиб додани чадвали қиматҳои функцияи $y=3x^2+2$ ба қиматҳои ғайраи функцияи $y=3x^2$ адади 2-ро ҳамчун қадд кардан кифоя аст.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	29	14	5	2	5	14	29

Нуктаҳоеро, ки координатаҳои он дар ин чадвал оварда шудаанд, дар ҳамвории координатавӣ тасвир карда, онҳоро бо хати суфта мепайвандем. Дар натиҷа, графики функцияи $y=3x^2+2$ ҳосил мешавад (расми 10, б).

Ба ҳар як нуқтаи $(x_0; y_0)$ -и графики функцияи $y=3x^2$ нуқтаи ягонаи $(x_0; y_0+2)$ -и графики функцияи $y=3x^2+2$ мувофиқ меояд ва баръакс. Яъне, агар ҳар як нуқтаи графики функцияи $y=3x^2$ -ро 2

воҳид ба боло кӯчонем, нуктаи мувофиқи графики функсияи $y=3x^2+2$ -ро ҳосил мекунем.

Ҳамин тариқ, графики функсияи $y=3x^2+2$ параболаест, ки қул-лааш дар нуктаи $(0; 2)$ буда, шоҳаҳояш ба боло равон аст.

Мисоли 2. Графики функсияи $y=3x^2-2$ -ро месозем.

Ба монанди мисоли 1 муҳокима ронда, ба хулосае меоем, ки график параболае мебошад, ки қуллааш дар нуктаи $(0; -2)$ буда, шоҳаҳояш ба боло равонаанд.

Дар ин ҷо графики функсияро бо ёрии сохтани нуктаҳо нишон додем. Бояд қайд намуд, ки ин тарз аз бисёр ҷиҳатҳо номукамал аст.

Пеш аз ҳама, номукаммалии ин тарз дар он зоҳир мешавад, ки мо шумораи беохири нуктаҳоро сохта наметавонем, аммо ҳар як хати қач дорои шумораи беохири нуктаҳо мебошад.

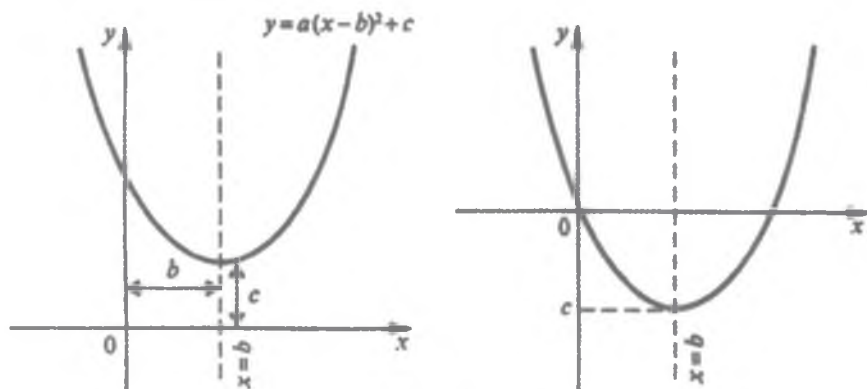
Ғайр аз ин, мо бо ин тарз равиши функсияро дар фосилаҳои охирнок муайян карда метавонему халос, аммо функсия метавонад дар фосилаи беохир, масалан дар $(-\infty; \infty)$ дода шуда бошад.

Аз тарафи дигар, ҳангоми сохтани графики функсия бояд хосиятҳои он пешакӣ муайян карда шавад, аммо бо ин тарз хосиятҳои функсия қариб истифода намешаванд.

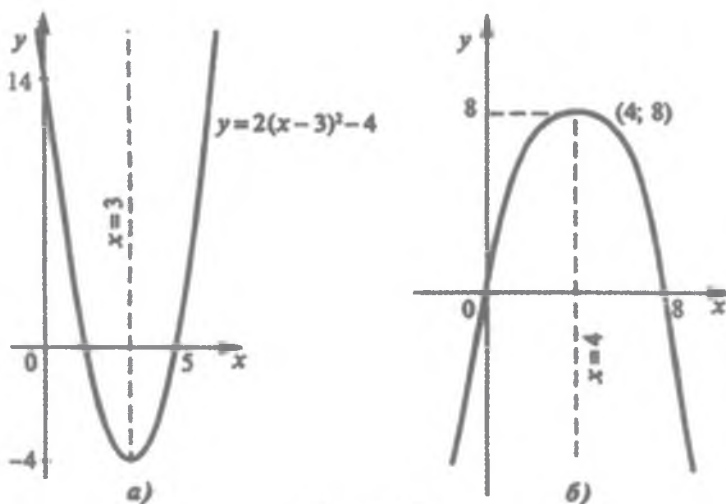
Далелҳои дар боло овардашуда моро водор мекунанд, ки гра-фики функсияро дар асоси хосиятҳои он созем.

Б) Графики функсияи $y=a(x-b)^2+c$.

Чӣ тавре, ки дар §3 п.7 дидем, хати ростии $x=b$ тири симметрии он буда, қуллааш дар нуктаи $(b; c)$ ҷойгир аст. Агар $a>0$ бошад, қимати хурдтаринаш ба c баробар аст, яъне шоҳаҳои парабола ба боло равонанд (расми 11).



Расми 11



Расми 12

Агар $a < 0$ бошад, шохаҳои параболо ба поён равонанд. Қимати калонтаринаш c аст.

Мисоли 3. Графики функсияи $y = 2(x-3)^2 - 4$ -ро месозем. Хати ростии $x=3$ тири симметрияи параболои $y = 2(x-3)^2 - 4$ буда, қуллааш дар нуктаи $(3; -4)$ ҷойгир аст. Азбаски $a = 2 > 0$ аст, пас шохаҳои параболо ба боло равонанд. Парабола тири абсиссаро дар нуктаҳои $(1; 0)$; $(5; 0)$ ва тири ординатаро дар нуктаи $(0; 14)$ мебурад (расми 12, а).

Мисоли 4. Графики функсияи $y = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 8$ -ро месозем.

Хати ростии $x=4$ тири симметрияи параболои додашуда буда, қуллааш дар нуктаи $(4; 8)$ ҷойгир аст. Азбаски $a = -\frac{1}{2} < 0$ аст, пас шохаҳои параболо ба поён равонанд. График тирҳои абсиссаро дар нуктаҳои $(0; 0)$; $(8; 0)$ мебурад (расми 12, б).

Мисоли 5. Аз функсияи квадратии $y = 2x^2 - 8x + 9$ квадрати пурра ҷудо карда, графикашро месозем.

Ҳа л. Функсияи додашударо ба квадрати пурра меорем:

$$2x^2 - 8x + 9 = 2(x-2)^2 + 1.$$

Хати ростии $x=2$ тири симметрияи параболо буда, қуллааш дар нуктаи $(2; 1)$ ҷойгир аст. Парабола тири Ox -ро намебурад, чунки дискриминант манфӣ мебошад. Шохаҳои параболо ба боло равонанд. Парабола тири Oy -ро дар нуктаи $(0; 9)$ мебурад (расми 13).

В) Графики функсияи $y = ax^2 + bx + c$.

Акнун, схемаи умумии сохтани графики функсияи квадратии $y = ax^2 + bx + c$ -ро меорем. Ин схема ба хосиятҳои функсия, ки онҳо дар пунктҳои 7 ва 8 дарҷ гардида буданд, асос карда мешавад.

1. *Равиши шохаҳоро муайян мекунем.* Чӣ тавре дидем, агар $a > 0$ бошад, шохаҳо ба боло ва агар $a < 0$ бошад, шохаҳо ба поён равонаанд.

2. *Нуктаҳои буриши графикро бо тири координатаҳо муайян мекунем.* Барои ёфтани нуктаи буриш бо тири ордината (чунин нукта ҳамеша вучуд дошта, ягона аст!) дар формула $x=0$ гузошта $y=c$ ҳосил мекунем. Яъне нуктаи $(0; c)$ ки дар тири ордината ҷойгир аст, мутааллиқи график мебошад. Барои ёфтани нуктаҳои буриш ба тири абсисса $y=0$ гузошта, муодилаи квадратии $ax^2+bx+c=0$ -ро ҳосил мекунем. Агар ин муодила дорои ду решаи x_1 ва x_2 бошад ($D=b^2-4ac > 0$), он гоҳ тири абсиссаро дар нуктаҳои $(x_1; 0)$ ва $(x_2; 0)$ мебурад. Агар муодила як реша дошта бошад ($D=b^2-4ac=0$), он гоҳ ин реша, ки ба $-\frac{b}{2a}$ баробар аст, нуктаи расиши парабола бо тири абсисса мебошад. Агар муодилаи квадратӣ реша надошта бошад ($D=b^2-4ac < 0$), он гоҳ графики функсияи квадратӣ тири абсиссаро намебурад.

3. *Координатаҳои қулла, тири симметрия, экстремум ва экстремали параболаро меёбем.* Чӣ тавре дидем (ниг. ба § 2 п. 5)

$$y = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Ин табдилот нишон медиҳад, ки абсиссаи қулла ба $\frac{b}{2a}$ ординатааш ба $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ баробар аст. Дар навбати худ, нуктаи $x_0 = -\frac{b}{2a}$ экстремали функсия буда, қимати экстремалиаш ё экстремумаш ба $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ баробар мебошад, яъне

$$y_{\text{экстр}} = y \left(-\frac{b}{2a} \right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

(ин қимат хурдтарин аст, агар $a > 0$ ва калонтарин аст, агар $a < 0$ бошад). Муодилаи хати росте, ки тири симметрияи графики функсия аст, муодилаи $x = -\frac{b}{2a}$ мебошад. (Ин хати рост бо тири ордината параллел буда, аз нуктаҳои абсиссаашон яхелаи ба — баробар иборат аст).

4. *Фосилаи афзуншавӣ ва камшавӣ (монотонӣ) функсияро муайян мекунем.* Аз мулоҳизаҳои боло бармеояд, ки агар $a > 0$ ($a < 0$) бошад, он гоҳ дар фосилаи $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ функсияи квадратӣ камшаванда (афзуншаванда) буда, дар фосилаи $\left(-\frac{b}{2a}; \infty\right)$ афзуншаванда (камшаванда) аст.

Маълумоти дар бандҳои 1-4 овардашуда пурра имконият медиҳанд, ки графики парабола сохта шавад. Дурустии ин тасдиқотро дар мисолҳои сохтани графикҳои функсияҳои квадратӣ мушаххас нишон медиҳем.

Мисоли 6. Графики функсияи $y=x^2+6x+5$ -ро месозем.

1. Шохаҳои парабола ба боло равонаанд, чунки $a=1>0$ аст.

2. Нуқтаи буриши функсияро бо тирҳои координата меёбем; ҳангоми $x=0$ будан, $y=5$ мешавад, яъне график тирӣ Oy -ро дар нуқтаи $(0; 5)$ мебурад. Ҳангоми $y=0$ будан, $x^2+6x+5=0$ аст. Ин муодилаи квадратиро ҳал намуда, $x_1=-5$; $x_2=-1$ -ро ҳосил мекунем, яъне график тирӣ Ox -ро дар нуқтаҳои $(-5; 0)$ ва $(-1; 0)$ мебурад.

3. Координатаҳои қуллаи парабола $x_0 = -\frac{b}{2a} = -3$; $y_0 = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -4$ мешаванд; тирӣ симметрияи график хати ростии $x=-3$ аст.

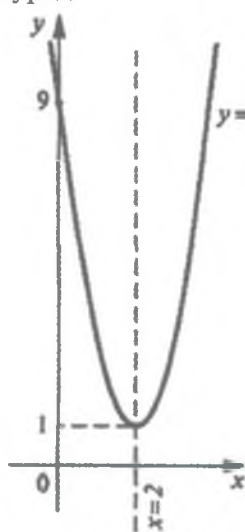
4. Функсия дар фосилаҳои $(-\infty; -3)$ камшаванда ва дар $(-3; \infty)$ афзуншаванда аст.

Натиҷаҳои болоро ҷамъбаст намуда, графики функсияро месозем. (Расми 14).

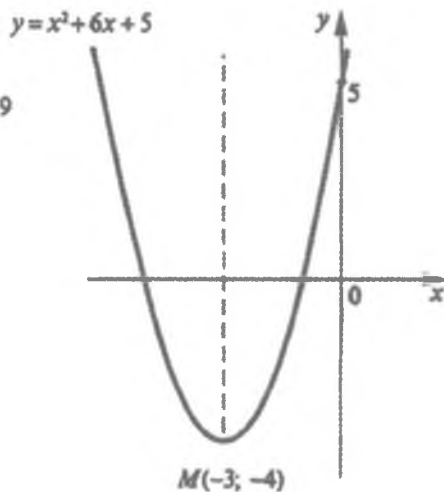
Мисоли 7. Графики функсияи $y=-x^2-6x+1$ -ро месозем.

1. Шохаҳои парабола ба поён равонанд, чунки $a=-1<0$.

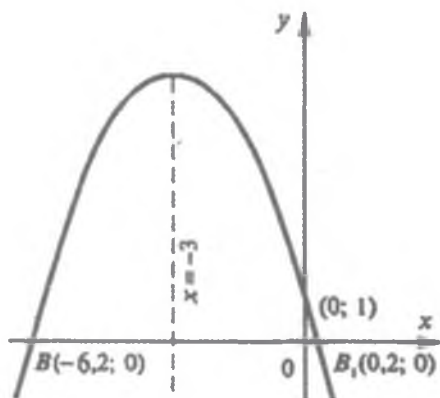
2. Дар ҳолати $x=0$ будан, $y=1$ аст, яъне график тирӣ Oy -ро дар нуқтаи $(0; 1)$ мебурад. Ҳангоми $y=0$ будан, $-x^2-6x+1=0$ мешавад. Муодилаи квадратиро ҳал намуда, $x_1=-6,2$; $x_2=0,2$ -ро ҳосил мекунем, яъне график тирӣ Ox -ро дар нуқтаҳои $(-6,2; 0)$ ва $(0,2; 0)$ мебурад.



Расми 13



Расми 14



Расми 15

3. Координатаҳои куллаи парабола

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -3; y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 10$$

тири симметрии он хати $x = -3$ аст.

4. Функция дар фосилаи $(-\infty; -3)$ афзуншаванда ва дар фосилаи $(-3; \infty)$ камшаванда аст. Графики функция дар расми 15 тасвир ёфтааст.

Мисол 8. Графики функцияи $y = x^2 - 4x$ -ро месозем.

1) $a = 1 > 0$ шохаҳо ба боло равонанд.

2) Нуқтаҳои буриши графикро бо тирҳои координата месёбем:

$$x=0; y=0; (0; 0); y=0; x^2 - 4x=0; x(x-4)=0;$$

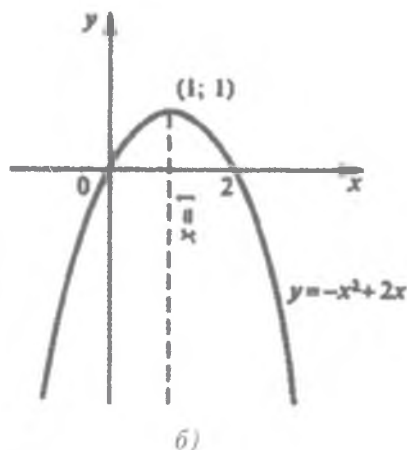
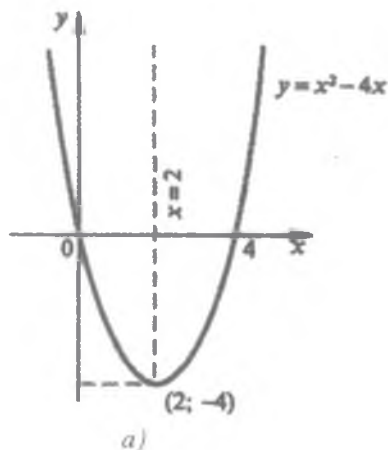
$$x=0; x=4; (0; 0); (4; 0).$$

3) Координатаҳои куллаи парабола $x_0 = -\frac{b}{2a} = 2; y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{16}{4} = -4$ $(2; -4)$ $x=2$ тири симметрии график.

4) Дар фосилаи $(-\infty; 2)$ функция камшаванда ва дар фосилаи $(2; \infty)$ функция афзуншаванда мебошад. Графики функция дар расми 16, а тасвир ёфтааст.

Мисол 9. Графики функцияи $y = -x^2 + 2x$ -ро месозем.

1) $a = -1 < 0$ шохаҳои парабола ба поён равонанд.



Расми 16

2) Нуқтаҳои буриши графикро бо тирҳои координата меёбем.
 $x=0$; $y=0$; $(0; 0)$; $y=0$; $-x^2+2x=0$; $x^2-2x=0$;
 $x(x-2)=0$; $x=0$; $x_2=2$; $(0; 0)$; $(2; 0)$

3) Координатаҳои қуллаҳои параболо $x_0 = -\frac{b}{2a} = 1$; $y = -\frac{b^2-4ac}{4a} = 1$
 $(1; 1)$; хати $x=1$ тири симметрияи параболо аст.

4) Функция дар фосилаи $(-\infty; 1)$ афзуншаванда ва дар $(1; \infty)$ камшаванда аст. Графики функция дар расми 16, б тасвир ёфтааст.

Мисоли 10. Графики функцияи $y = 0,5x^2 + 3x + 6$ -ро месозем.

1) $a=0,5 > 0$ шохаҳои параболо ба боло равонанд.

2) Нуқтаҳои буриши графикро бо тирҳои координатаҳо меёбем:

$x=0$; $y=6$; $(0; 6)$; $y=0$; $0,5x^2 + 3x + 6=0$;

$D=b^2-4ac=9-4 \cdot 0,5 \cdot 6=9-12=-3 < 0$.

Муодила реша надорад, яъне тири $0x$ -ро намебурад.

3) Координатаҳои қуллаи параболо

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{1} = -3; \quad y_0 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{9 - 4 \cdot 0,5 \cdot 6}{4 \cdot 0,5} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Хати ростии $x=-3$ тири симметрияи график мебошад.

4) Функция дар фосилаҳои $(-3; \infty)$ афзуншаванда аст. График дар расми 17 тасвир шудааст.

Мисоли 11. Графики функцияи $y = -x^2 + 4x - 5$ -ро месозем.

1) $a=-1 < 0$ шохаҳои параболо ба поён равонанд.

2) Нуқтаҳои буриши тирҳои координата бо график:

$x=0$; $y=-5$; $(0; -5)$; $y=0$; $-x^2 + 4x - 5=0$; $x^2 - 4x + 5=0$.

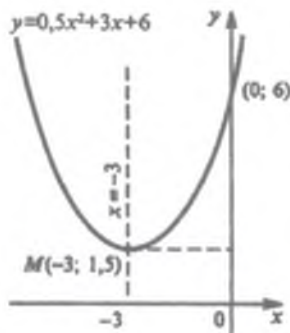
Муодила реша надорад, яъне график тири $0x$ -ро намебурад.

3) Координатаҳои қуллаи параболо

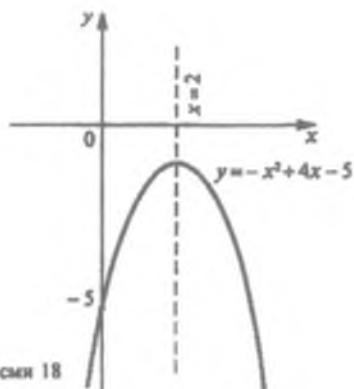
$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{1} = -3; \quad y_0 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} = -1;$$

Хати ростии $x=2$ тири симметрияи параболо мебошад.

4) Функция дар фосилаҳои $(2; \infty)$ камшаванда ва дар $(-\infty; 2)$ афзуншаванда аст. Графики функция дар расми 18 тасвир ёфтааст.



Расми 17



Расми 18



1. Хосиятҳои функсияи квадратии $y=ax^2$ -ро а) ҳангоми $a>0$ будан; б) ҳангоми $a<0$ будан, номбар кунед. 2. Аз графики функсияи $y=ax^3$ графики функсияи $y=ax^2+c$ -ро чӣ тавр ҳосил кардан мумкин аст? 3. Графики функсияи $y=a(x-b)^2+c$ аз кадом қиматҳои функсияи квадратӣ сохта мешавад? 4. Зинаҳои схемаи умумии сохтани графики функсияи $y=ax^2+bx+c$ -ро номбар намуда, онҳоро дар мисоли сохтани графикҳои функсияҳои квадратии мушаххас нишон диҳед.

Графики функсия сохта шавад (89–91).

89. а) $y = 4x^2$; г) $y = -\frac{1}{4}x^2$; е) $y = -\frac{3}{4}x^2$; з) $y = -\frac{4}{5}x^2$;
б) $y = \frac{1}{4}x^2$; г) $y = \frac{2}{3}x^2$; ё) $y = -\frac{3}{4}x^2$; и) $y = \frac{1}{3}x^2$;
в) $y = -4x^2$; д) $y = -\frac{2}{3}x^2$; ж) $y = \frac{4}{5}x^2$; к) $y = -\frac{1}{3}x^2$.
90. а) $y = x^2 + 1$; г) $y = -2x^2 + 3$; е) $y = -3x^2 - 1$; з) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$;
б) $y = -x^2 + 1$; г) $y = x^2 + 1$; ё) $y = -\frac{3}{4}x^2$; и) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$;
в) $y = x^2 + 3$; д) $y = 3x^2 - 1$; ж) $y = -3x^2 + 1$; к) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$.
91. а) $y = (x + 2)^2 - 3$; г) $y = 2(x - 1)^2 + 2$; ж) $y = 3(x + 5)^2 - 1$;
б) $y = (x - 2)^2 + 3$; д) $y = -2(x - 2)^2 + 3$; з) $y = 3(x + 2)^2 + 3$;
в) $y = (x - 3)^2 + 2$; е) $y = -3(x + 1)^2 - 2$; и) $y = 3(x + 5)^2 + \frac{2}{3}$;
г) $y = (x + 3)^2 - 1$; ё) $y = -3(x + 1)^2 + 2$; к) $y = 3(x + 2)^2 + \frac{3}{4}$.
92. Аз функсияи квадратӣ квадрати пурра чудо карда, графикашро созед:
- а) в) $y = 3x^2 - 6x + 7$; в) $y = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{7}{2}$; г) $y = 2x^2 + x$;
б) $y = \frac{1}{4}x^2 + x - \frac{24}{5}$; г) $y = 3x^2 - 18x + 7$; д) $y = -2x^2 + x$;
93. Графики функсияи квадратиро созед:
- а) $y = -x^2 + 5x + 6$; г) $y = -x^2 + 5x - 6$; е) $y = 0,5x^2 - 2x + 2$;
б) $y = x^2 + 5x + 6$; г) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$; ё) $y = -0,5x^2 - 4x + 3$;
в) $y = x^2 - 5x - 6$; д) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$; ж) $y = 3x^2 + 4x - 1$;

Машиқҳо барои тақрор

94. Муодиларо ҳал кунед:

а) $x - 1 = \frac{3}{x+1}$; б) $5x + 6 = \frac{7}{2x+9}$; в) $x^2 + 5x + 6 = 0$.

95. Ифодаро сода кунед:

а) $\left(8\frac{11}{12} - 6\frac{5}{12}\right) : \frac{5}{8}$; б) $\left(\frac{5}{12} + 6\frac{3}{8}\right) \cdot \frac{12}{19}$; в) $\frac{5}{22} : \frac{5}{2} - \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{22} + \frac{3}{11}$.

96. а) Ба мағоза се ҳалта орд оварданд. Агар маълум бошад, ки ҳар як ҳалта 50 кг орд дорад, ба мағоза чанд кг орд оварданд?

б) Устохона дар як ҳафта $\frac{2}{3}$ ҳиссаи захираи матоъро сарф кард.

Аз $\frac{3}{8}$ ҳиссаи матои сарфшуда куртаи занона дӯхтанд. Агар ба куртаҳои занона 240 м сарф шуда бошад, дар устохона чӣ қадар матоъ будааст?

97. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $2x - 6 > 4$; б) $\frac{x-2}{3x+12} > 0$; в) $\frac{x-1}{2x+4} < 0$.

98. Экстремум ва экстремали функсияро ёбед:

а) $y = 3(x-3)^2 + 2$; б) $y = -3(x+2)^2 - 3$; в) $y = 4(x-5)^2 + 5$.

§4. ҲАЛЛИ НОБАРОБАРИҲОИ КВАДРАТӢ

10. Тарзи графикии ҳалли нобаробариҳои квадратӣ

Ба омӯзиш ва ҳалли нобаробариҳои квадратӣ, ки онҳоро нобаробариҳои дараҷаи дуҷуми яқтагирёбанд ва мегӯянд ва намуди

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ (мувофиқан } ax^2 + bx + c \geq 0) \quad (1)$$

ё

$$ax^2 + bx + c < 0 \text{ (мувофиқан } ax^2 + bx + c \leq 0)$$

доранд, шуруъ мекунем. Хотиррасон мекунем, ки мо ҳанӯз дар синфи 8 мафҳуми нобаробариҳоро қорӣ карда, хосиятҳои умумии он ва тарзҳои ҳал кардани нобаробариҳои ҳаттӣ, касран ҳаттӣ, инчунин системаҳои чунин нобаробариҳоро муоина намуда будем.

Дар ин параграф асосан бо тарзҳои ҳалли нобаробариҳои дараҷаи дуҷум шинос мешавем. Шиносиро аз тарзи графикӣ сар мекунем.

Хосиятҳои нобаробариҳо имконият медиҳанд, ки омӯзишро бо нобаробарии намуди

$$ax^2 + bx + c > 0$$

маҳдуд намоем, чунки нобаробарии $ax^2 + bx + c < 0$ дар натиҷаи ба -1 зарб задани ҳарду қисми он ба нобаробарии намуди (1) мубаддал

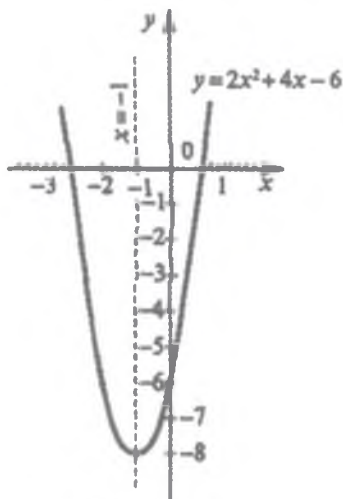
мегардад (тағйироте, ки ҳангоми ҷой доштани нобаробариҳои ғайрикатъӣ), яъне нобаробариҳои аломати $\geq$ ё $\leq$ дошта, дар ҳалли ёфташудаи (1) гузаронидан зарур аст, аз мисолҳои дар поён овардашуда ба осонӣ дарк карда мешаванд).

Моҳияти тарзи графیکی ҳалли нобаробарии (1) чунин аст: ҷй тавре медонем, ҳал кардани нобаробарӣ – ин ёфтани ҳамаи он қиматҳои тағйирёбандаи новобаста, ки барояшон нобаробарӣ дуруст аст, мебошад. Пас, агар графики функсияи $y = ax^2 + bx + c$ -ро дар системаи координатавӣ тасвир кунем, он гоҳ ҳамаи абсиссаҳои он нуқтаҳои график, ки ординаташон мусбат аст, ҳалли нобаробарии (1) мебошанд, яъне чизи навро, ки мо ин ҷо бо $\bar{y}$ дучор омадаем, ин ёфтани он қиматҳои тири ададиест, ки дар онҳо график дар ҷорҳои I ё II воқеъ аст.

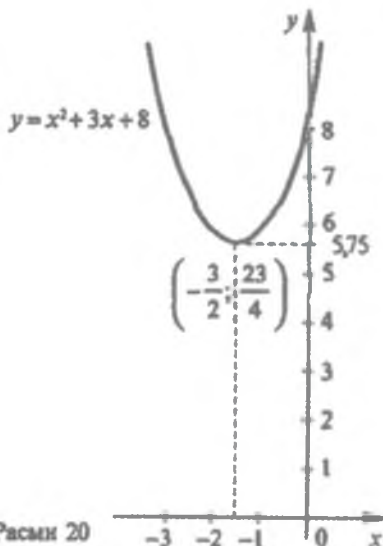
Мисоли 1. Нобаробарии $2x^2 + 4x - 6 > 0$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. Сеаъзогии квадратии $2x^2 + 4x - 6$ ду решаи ҳақиқии $x_1 = -3$; $-x_2 = 1$ -ро дорад. Бинобар ин, параболаи $y = 2x^2 + 4x - 6$ тири Ox -ро дар ду нуқта мебурад, ки абсиссаи онҳо, мувофиқан, ба -3 ва 1 баробаранд. Азбаски коэффисенти назди x^2 аз нул калон мебошад, пас шохаҳои парабола ба боло равонаанд. Қуллаи он дар нуқтаи координатаҳояшон ба $x_0 = -1$; $y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -8$ баробар, яъне дар нуқтаи $(-1; -8)$ ҷойгир аст, ҳангоми $x=0$ будан $y = -6$ аст, яъне графики функсияи $y = 2x^2 + 4x - 6$ тири ординатаро дар нуқтаи $(0; -6)$ мебурад (расми 19). Аз расм дида мешавад, ки қимати сеаъзогӣ ҳангоми $x < -3$ ва $x > 1$ будан, мусбат мебошад.

Ҷавоб: $(-\infty; -3) \cup (1; \infty)$.



Расми 19



Расми 20

Мисоли 2. Нобаробарии $x^2+3x+8\geq 0$ -ро ҳал мекунем.

Ҳа л. Графики функцияи $y=x^2+3x+8$ параболасе мебошад, ки шохаҳои ба боло равонаанд, чунки $a=1>0$ аст. Азбаски $D=9-32=-23<0$ мебошад, бинобар ин муодилаи $x^2+3x+8=0$ реша надорад. Парабола тирӣ Ox -ро намебурад. Ҳангоми $x=0$ будан, $y=8$ мешавад. График тирӣ Oy -ро дар нуқтаи $(0; 8)$ мебурад. Қуллаи он дар нуқтаи координатаҳои $x_0 = -\frac{3}{2}$; $y_0 = \frac{23}{4}$ ҷойгир аст (расми 20). Аз расм маълум аст, ки барои қимати ихтиёрии x нобаробарии $x^2+3x+8\geq 0$ ҷой дорад.

Ҷавоб: $(-\infty; \infty)$.

Мисоли 3. Нобаробарии $5x^2+9x-2<0$ -ро ҳал мекунем.

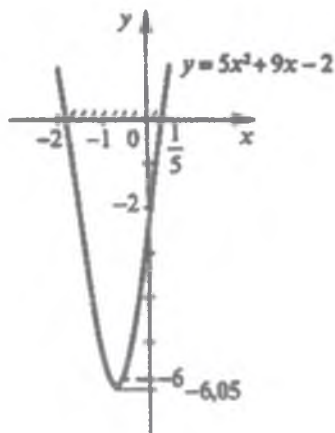
Ҳа л. Графики ин функция параболасе, ки шохаҳои ба боло равонаанд. Нуқтаи буриши графикро бо тирҳои координата муайян мекунем.

$$x=0, y=-2, (0; -2); y=0, 5x^2+9x-2=0, x_1=2; x_2=\frac{1}{5}.$$

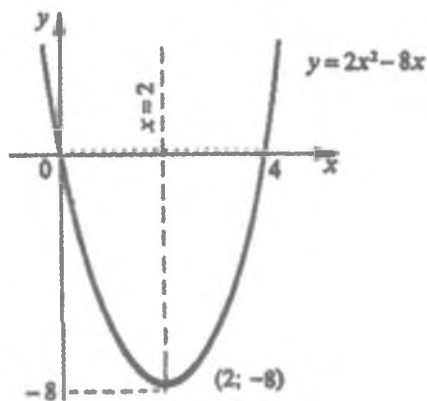
Ҳамин тариқ, параболаро $y=5x^2+9x-2$ тирӣ Ox -ро дар нуқтаҳои абсиссаашон -2 ва $\frac{1}{5}$, тирӣ Oy -ро дар нуқтаи ординатааш -2 мебурад. Қуллаи параболаро дар нуқтаи координатаҳои $x_0 = \frac{9}{10}$; $y_0 = \frac{121}{20}$ воқеъ аст. Бо назардошти ин далелҳо графики функцияро месозем (расми 21).

Аз график дида мешавад, ки барои $x \in (-2; \frac{1}{5})$ $5x^2 + 9x - 2 < 0$ аст.

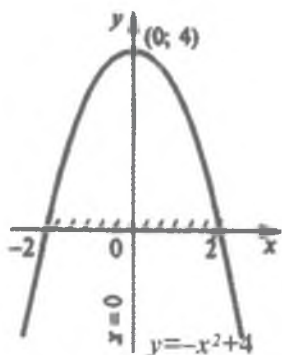
Мисоли 4. Нобаробарии $2x^2-8x\leq 0$ -ро ҳал мекунем.



Расми 21



Расми 22



Расми 23

Ҳа л. $a=2>0$, шохаҳои параболо ба боло равонанд. Агар дар параболои $y=2x^2-8x$ ба ҷойи x нул гузорем, қимати y ба 0 баробар мешавад, яъне график аз болои нуқтаи $(0; 0)$ мегузарад. Агар $y=0$ бошад, он гоҳ $2x^2-8x=0$; $x(2x-8)=0$, $x_1=0$, $x_2=4$ мешавад, яъне график тири Ox -ро дар нуқтаҳои абсиссашон 0 ва 4-буда мебурад. Қуллаи параболо дар нуқтаи $x_0=2$; $y_0=-8$ воқеъ аст (расми 22.) Ҳамин тариқ, барои $x \in [0; 4]$ нобаробарӣ $2x^2-8x < 0$ дуруст аст.

Ҷавоб: $[0; 4]$.

Мисоли 5. Нобаробарии $-x^2+4>0$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. $a=-1<0$, шохаҳои параболо ба поён равонанд. Аз муодилаи параболои $y=-x^2+4$ дида мешавад, ки қуллаи он дар нуқтаи $(0; 4)$ ҷойгир аст.

$y=0$, $-x^2+4=0$, $x^2-4=0$, $(x-2)(x+2)=0$; $x_1=-2$; $x_2=2$; график тири Ox -ро дар нуқтаҳои $(-2; 0)$ ва $(2; 0)$ мебурад (расми 23). Ҳамаи қиматҳои $x \in [-2; 2]$ нобаробарии $-x^2+4 \geq 0$ -ро қаноат мекунонад.

Ҷавоб: $[-2; 2]$.

Мисоли 6. Нобаробарии $-2x^2+6x-10<0$ -ро ҳал мекунем.

Ҳа л. Азбаски $a=-2<0$ аст, пас шохаҳои параболо ба поён равонанд. Нуқтаҳои буриши графикро бо тирҳои координатаҳо муайян мекунем: агар $x=0$ бошад, он гоҳ $y=-10$, яъне нуқтаи $(0; -10)$ ба график тааллуқ дорад. Агар $y=0$ бошад, пас $-2x^2+6x-10=0$. Барои ин муодила $D=6^2-4(-10) \cdot (-2)=36-80=-44<0$ аст. Барои ҳамин, муодила решаи ҳақиқӣ надорад. Графикҳои $y=-2x^2+6x-10$ -ро сохта (расми 24), а) муқаррар мекунем, ки нобаробарии мазкур барои ҳамаи қиматҳои тағйирёбанда дуруст аст.

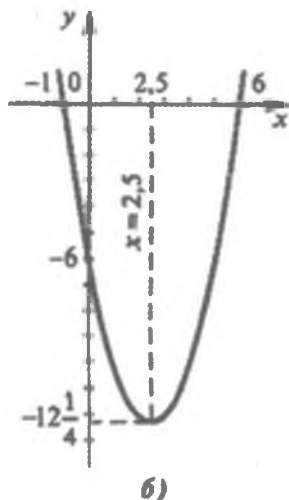
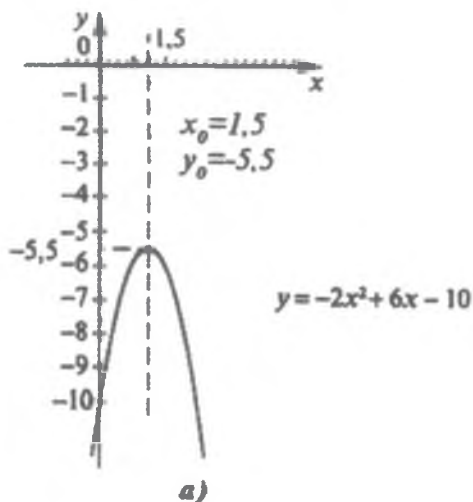
Ҷавоб: $(-\infty; \infty)$

Мисоли 7. Соҳаи муайянии функсияи $y = \sqrt{x^2-5x-6}$ -ро меёбем.

Ҳа л. Азбаски аргумент x дар таҳти решаи квадратӣ дода шудааст, бинобар ин функсияи y дар ҳолати $x^2-5x-6 \geq 0$ будан маъно дорад. Ин нобаробариро бо тарзи графикӣ ҳал мекунем: $a=1>0$ шохаҳои параболо ба боло равонанд. Қуллаи параболаро меёбем.

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2};$$

$$y_0 = \frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{25+24}{4} = -\frac{49}{4} = -12\frac{1}{4}; \left(2\frac{1}{2}; -12\frac{1}{4}\right).$$



Расми 24

Муодилаи $x^2 - 5x - 6 = 0$ -ро ҳал намуда, нуқтаи буриши графикро бо тири Ox меёбем $x_1 = 6$; $x_2 = -2$. Ҳангоми $x = 0$ будан, $y = -6$ мешавад. График тири Ox -ро дар нуқтаҳои $(-1; 0)$ $(6; 0)$ ва тири Oy -ро дар нуқтаи $(0; -6)$ мебурад. Хати рости $x = 2,5$ тири симметрии график мешавад (расми 24, б) Ҳамин тавр, $x \in (-\infty; -1]$ ва $x \in [6; \infty)$ нобаробарии $x^2 - 5x - 6 > 0$ -ро қаноат мекунонанд.

Ҷ а в о б: $(-\infty; -1] \cup [6; \infty)$.

М и с о л и 8. Муайян мекунем, ки дар кадом қиматҳои m нобаробарии $x^2 + x + m > 0$ дуруст аст.

Ҳ а л. Нобаробарии додашуда барои ҳамон қиматҳои m қой дорад, агар барояшон дискриминанти муодилаи $x^2 + x + m = 0$ манфӣ бошад, яъне муодила ҳал надошта бошад. Бинобар ин кифоя аст,

ки $D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot m < 0$; $1 - 4m < 0$; $-4m < -1$; $4m > 1$; $m > \frac{1}{4}$ ги-рем.

Ҷ а в о б: $(\frac{1}{4}; \infty)$.



1. Чӣ гуна нобаробарино нобаробарии квадратӣ меноманд? 2. Чӣ гуна намуди нобаробариҳоро медонед? 3. Нобаробарии номаълумдорро ҳал кардан чӣ маънӣ дорад? 4. Моҳияти тарзи графии ҳалли нобаробариҳои квадратиро баён карда, онро дар ҳалли нобаробариҳои мушаххас нишон диҳед.

Нобаробарио ҳал кунед (99-105).

99. а) $x^2-5x+4>0$; б) $x^2+4>0$; в) $2x^2-7x-15\geq 0$.
100. а) $12x^2+17x-105<0$; б) $x^2-4>0$; в) $x^2+6x+9\leq 0$.
101. а) $12x^2-4x+3<0$; б) $3x^2+2x+1>0$; в) $x^2+13x+36\leq 0$.
102. а) $x^2+4x^2+4\leq 0$; б) $-2+2x-3x^2>0$; в) $-5+4x-3x^2<0$.
103. а) $x^2-3x>10$; б) $4x^2+9>12$; в) $4x-x^2<5$.
104. а) $(x-5)x+4x>2$; б) $(x+5)x\geq 2(x^2+2)$; в) $(x+4)(x+5)-5\geq 5$.
105. а) $\frac{1}{2}x^2-3x+6<0$; б) $2(x+2)^2-3,5\geq 2x$; в) $\frac{x^2}{2}\geq -5x+5,5$.
106. а) Як тарафи росткунча аз тарафи дигараш 7 см калон аст. Масоҳати росткунча аз 60 см² хурд аст. Дарозии тарафи дигари росткунчаро ёбед.
б) Бари росткунча аз дарозияш 1 см хурд аст. Дарозии росткунча бояд чӣ қадар бошад, то ки масоҳати он аз 12 см² калон шавад?
107. Соҳаи муайяни функсияро ёбед:
а) $y = \sqrt{x^2 - 25}$; б) $y = \sqrt{2x^2 - 3} + 1$;
б) $y = \sqrt{-x^2 - 6x + 7}$; г) $y = \sqrt{64x^2 - x}$;
108. Барои кадом қиматҳои m нобаробарӣ барои қиматҳои дилхоҳи x дуруст аст:
а) $x^2+2x+m>0$; б) $mx^2+12x-5<0$;
б) $x^2+2x+m\geq 10$; г) $x^2+(m+2)x+8m+1>0$?

Машиқҳо барои такрор

109. Козфитсиентҳои сеаъзогии ax^2+bx+c -ро муайян кунед, агар маълум бошад, ки ҳангоми $x=4$ будан, сеаъзогӣ ба нул мубаддал шуда, ҳангоми $x=-4$ будан, он қимати хурдтарини -8 дорад.
110. Муодиларо ҳал кунед:
а) $8x-3=5x+6$; б) $2x(3x-2)-3\left[1-(2-x)(2x+3)-\frac{x-3}{2}\right]=13$;
111. Нобаробариҳоро ҳал кунед.
а) $x(5-x)>3$; б) $6(2x+7)<15(x+2)$.
112. Як ҳуруфчин дастнависро дар $3\frac{1}{3}$ рӯз, вале дуҷумаш дар $2\frac{1}{3}$ рӯз чоп карда метавонад. Ҳар ду ҳуруфчин дар як вақт кор карда, ин дастнависро дар чанд рӯз чоп мекунад?
113. Суммаи ду адад 12, вале фарқи онҳо ба 2 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.
114. Далер ва Некрӯз 16 дона чормағз доштанд. Агар Некрӯз ба Далер 6 дона чормағз диҳад, дар дасти ӯ назар ба Далер 3 маротиба камтар чормағз мемонад. Далер ва Некрӯз чанддонагӣ чормағз доштанд?

11. Бо методи фосилаҳо ҳал кардани нобаробариҳо

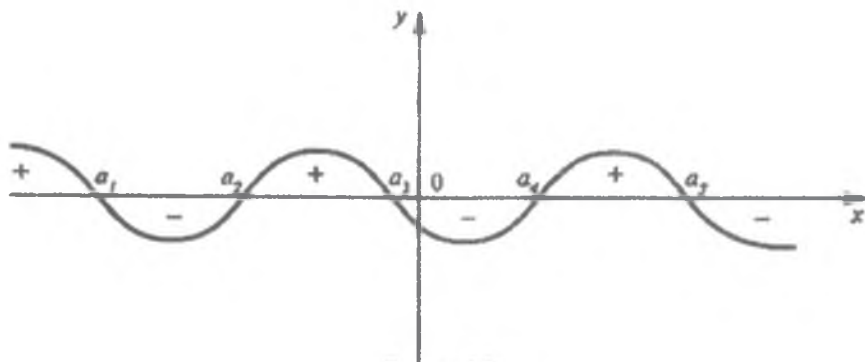
Акнун, тарзи ҳал кардани нобаробарии $ax^2+bx+c>0$ -ро ки он методи фосилаҳо ном дорад, меорем. Дар аввал моҳияти методҳоро баён мекунем. Фарз мекунем, тамоми тири ададӣ, яъне фосилаи $(-\infty; \infty)$ ба фосилаҳои $(-\infty; a_0)$ (a_0, a_1); (a_1, a_2) ; (a_2, a_3) ; ...; (a_n, a_{n+1}) (a_{n+1}, ∞) чунон ҷудо карда шудааст, ки дар якеи онҳо аломати функсияи $y=f(x)$ доимӣ аст: (Яъне, масалан барои ҳамаи нуқтаҳои фосилаи (a_1, a_2) минус аст) Дар айни ҳол ин аломат навбат ба навбат (пайи ҳам) иваз мешавад (расми 25). Ин маънои онро дорад, ки нуқтаҳои $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ нулҳои функсияи $y=f(x)$ (решаҳои муодилаи $f(x)=0$) мебошанд.

Чунин фосилаҳо *фосилаҳои доималоматии* функсия ном доранд. Бигузор, фосилаҳои доималоматии функсия маълуманд. Ҳосили ҷамъи ҳамаи онҳо (бо маънои ҷамъи маҷмӯъҳо), ки дар онҳо аломати функсия плюс аст, ҳалли нобаробарии $f(x)>0$ буда, ҳосили ҷамъи ҳамаи онҳо, ки дар онҳо аломати функсия минус аст, ҳалли нобаробарии $f(x)<0$ мебошад. Масалан, маҷмӯи $(-\infty; a_2) \cup (a_2; a_3) \cup (a_4; a_5)$ ҳалли нобаробарии $f(x)>0$ буда, маҷмӯи $(a_1; a_2) \cup (a_3; a_4) \cup (a_5; \infty)$ ҳалли нобаробарии $f(x)<0$ мебошад (ниг. ба расми 25).

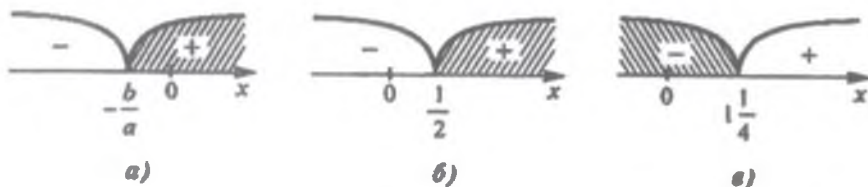
Ҳамин тарик, воситаи асосии истифодаи ин метод донишгари фосилаҳои доималоматии функсия мебошад. Мо дар аввал тарзи истифодаи ин методро барои ёфтани ҳалли нобаробариҳои мушаххаси ҳаттӣ, касран ҳаттӣ ва баъд, барои нобаробариҳои дараҷаи дуум меорем.

А) *Нобаробарии ҳаттӣ (дараҷаи якум) $ax+b>0$ ($a>0$).*

Адади $-\frac{a}{b}$ решаи ягонаи муодилаи $ax+b=0$ аст. Пас, тири ададӣ ба фосилаи $(-\infty; -\frac{b}{a})$ ва $(-\frac{b}{a}; \infty)$ ҷудо мешавад, ки дар онҳо функсияи ҳаттӣ $f(x)=ax+b$ доималомат аст (дар фосилаи якум)



Расми 25



Расми 26

аломат манфӣ буда, дуҷум мусбат аст (расми 26). Ҳамин тарик, фосилаи $\left(-\frac{b}{a}; \infty\right)$ ҳалли нобаробарии мазкур аст.

Мисоли 1. Нобаробарии $3(x-1) > x-2$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. Нобаробарии додашуда $3x-3-x+2 > 0$ ё ба $2x-1 > 0$ баробарқувва аст. Решаи $2x-1=0$ адади $\frac{1}{2}$ мебошад (расми 26,б).

Ҷавоб: $\left(\frac{1}{2}; \infty\right)$.

Мисоли 2. Нобаробарии ҳаттии $-3(x-1) > x-2$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. Табдилоти содари иҷро карда, ҳосил мекунем:

$$-3(x-1)-(x-2)=-3x-x+3+2=-4x+5 > 0 \text{ ё } 4x-5 < 0.$$

Решаи муодилаи $4x-5=0$ ба $x=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$ баробар аст. Пас, дар $\left(-\infty; 1\frac{1}{4}\right)$ $f(x)=4x-5$ манфӣ буда, дар $\left(1\frac{1}{4}; \infty\right)$ мусбат аст (расми 26,в).

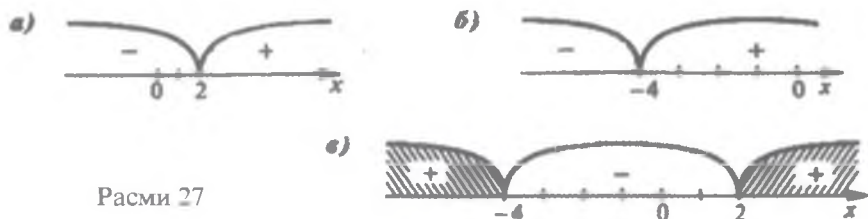
Ҷавоб: $\left(-\infty; 1\frac{1}{4}\right)$

Б) Нобаробарии касран ҳаттӣ: $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$ -ро ҳал мекунем.

Тарзи истифодаи методро дар ҳалли чунин ду нобаробарӣ нишон медиҳем.

Мисоли 3. Нобаробарии касран ҳаттӣ $\frac{x-2}{3x+12} > 0$ -ро ҳал мекунем.

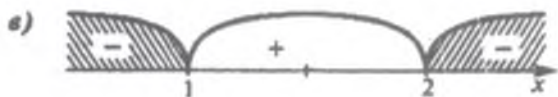
Ҳал. Адади 2-решаи сурат, адади 4-решаи махраҷ аст. Пас, сурат дар $(-\infty; 2)$ манфӣ ва дар $(2; \infty)$ мусбат буда (расми 27,а) махраҷ дар $(-\infty; -4)$ манфӣ ва дар $(-4; \infty)$ мусбат аст (расми 27,б).



Расми 27



Расми 28



Ин маълумот ва каср будани $f(x) = \frac{x-2}{3x+12}$ ро ба инобат гирифта, барояш чунин фосилаҳои доималоматиро ҳосил мекунем (расми 27, в). (Дар $(-4; -2)$ аломати $\frac{x-2}{3x+12}$ манфӣ шуд, чунки дар он сурат манфӣ буда, махраҷ мусбат аст). Аз расм намоён аст, ки маҷмӯи $(-\infty; -4)$ ва $(2; \infty)$ ҳалли нобаробарӣ мебошад.

Ҷ а в о б: $(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$.

М и с о л и 4. Нобаробарии $\frac{x-1}{-2x+4} < 0$ -ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Фосилаҳои доималоматии сурат $x-1$ (расми 28, а) махраҷ $-2x+4$ (расми 28, б) ва касри $f(x) = \frac{x-1}{-2x+4}$ -ро (расми 28, в) дар тире ададӣ тасвир мекунем:

Ҷ а в о б: $(-\infty; 1) \cup (2; \infty)$.

В) Нобаробарии квадратии $ax^2+bx+c>0$.

Бигзор, x_1 ва x_2 решаҳои муодилаи квадратии $ax^2+bx+c=0$ бошанд. Он гоҳ, чӣ тавре дидем,

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

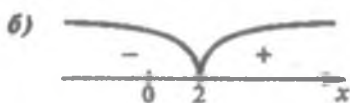
Фосилаҳои доималоматии зарбшавандаҳои хаттӣ $x-x_1$ ва $x-x_2$ -ро мувофиқи зерпункти А), баъд функцияи $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)$ -ро ҳамчун ҳосили зарб муайян карда, нобаробариро бо осонӣ меёбем.

М и с о л и 5. Нобаробарии $2x^2-7x+6>0$ -ро ҳал мекунем.

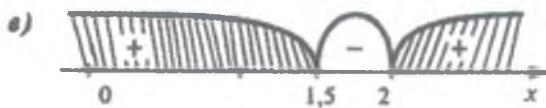
Ҳ а л. Муодилаи квадратии $2x^2-7x+6=0$ -ро ҳал карда мебинем, ки $x_1=1,5$ ва $x_2=2$ решаҳои нобаробарӣ мебошанд. Пас, $2x^2-7x+6=2(x-1,5)(x-2)$.

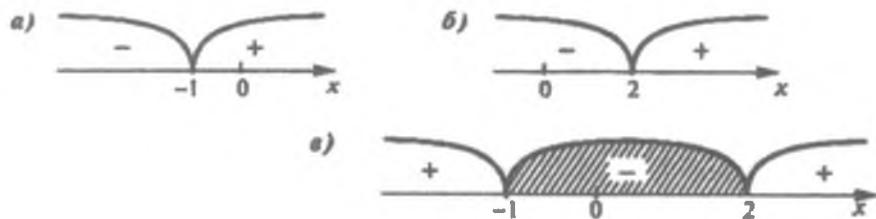
Аломати $x-1,5$ дар расми 29, а, аломати $x-2$ -ро аз расми 29, б, аломати $2(x-1,5)(x-2)$ -ро аз расми 29, в муайян мекунем.

Ҷ а в о б: $(-\infty; 1,5) \cup (2; \infty)$.



Расми 29





Расми 30

Мисоли 6. Нобаробарии $x^2 - x - 2 < 0$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. Решаҳои сазвогии квадратиро меёбем:

$$x^2 - x - 2 = 0; \quad x_1 = -1; \quad x_2 = 2.$$

Ҳамин тариқ,

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2).$$

$x+1$ дар фосилаи $(-\infty; -1)$ манфӣ ва дар $(-1; +\infty)$ мусбат (30; а);
 $x-2$ бошад, дар фосилаҳои $(-\infty; 2)$ манфӣ, дар $(2; \infty)$ мусбат;
 $(x+1)(x-2)$ дар фосилаҳои $(-\infty; -1)$ мусбат аст (расми 30)

Ҷавобро бо назардошти он ки нобаробарии мазкур ғай-
риқатъӣ аст, менависем:

Ҷ а в о б: $[-1; 2]$.

Мисоли 7. Графики $y = |x^2 - 4| + x^2$ -ро месозем.

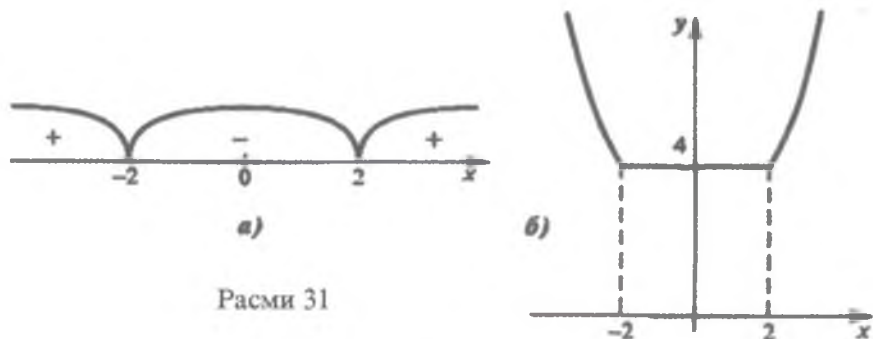
Барои кушодани қимати мутлақ нобаробарии $x^2 - 4 > 0$ -ро бо ме-
тоди фосилаҳо ҳал мекунем (расми 31, а):

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2).$$

Аз расм аён аст, ки барои $x \in (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$ $x^2 - 4 \geq 0$ буда, барои
 $x \in (-2; 2)$, $x^2 - 4 < 0$ аст. Ҳамин тариқ,

$$y = \begin{cases} 2x^2 - 4 & \text{агар } x \notin (-2; 2) \\ 4 & \text{агар } x \in [-2; 2]. \end{cases}$$

Графики ин функсия дар расми 31, б оварда шудааст.



Расми 31



Расми 32

Ин метод на танҳо барои ҳал кардани нобаробариҳои квадратӣ, балки барои ҳал кардани нобаробариҳои мураккаб ҳам истифода мешавад.

Мисоли 8. Нобаробарии $2x^3 - 5x^2 + 2x \leq 0$ -ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Бисёраъзогии $2x^3 - 5x^2 + 2x > 0$ ро ба зарбшавандаҳо ҷудо мекунем:

$$2x^3 - 5x^2 + 2x = 2x(x^2 - 2,5x + 1) = 2x(x - 0,5)(x - 2).$$

Бинобар ин, нобаробариро ин тавр навиштан мумкин аст:

$$2x(x - 0,5)(x - 2) \leq 0.$$

Дар тири ададӣ нуктаҳои 0; 0,5; 2-ро қайд мекунем. Ин нуктаҳо тири ададиро ба чор фосила ҷудо мекунад (расми 32).

Ҳангоми $x > 2$ будан, ҳар як зарбшавандаи ҳосили зарби $2x(x - 0,5)(x - 2)$ мусбат мебошад. Аз ин сабаб барои $x > 2$, $2x(x - 0,5)(x - 2) > 0$ аст. Агар ивазшавии аломати ҳосили зарбро ҳангоми ба фосилаи ҳамсоя гузаштан ба эътибор гирем, он гоҳ аломати ҳосили зарбро барои ҳар як фосила муайян мекунем (расми 32).

Ҳамин тариқ, бо назардошти ғайриқатъӣ будани нобаробарии додашуда ҳамаи x -ҳои нимпорчаи $(-\infty; 0]$ ва порчаи $[0,5; 2]$ ҳалли нобаробарианд.

Ҷ а в о б: $(-\infty; 0] \cup [0,5; 2]$.

1. Фосилаҳои доималоматии функсияро чӣ тавр меёбанд?

? 2. Мохияти методи фосилаҳоро барои ёфтани ҳалли нобаробариҳои хаттӣ, касран хаттӣ ва квадратӣ баён намуда, онро дар ҳалли мисолҳои мушаххас нишон диҳед. 3. Мисолҳои нобаробариҳои нисбатан мураккабро оред, ки онҳоро бо методи фосилаҳо ҳал кардан мумкин бошад.

Методи фосилаҳоро истифода карда, нобаробариҳоро ҳал кунед (115-118).

115. а) $2(x-3) > x-1$; г) $-3(x-1) < 2x+12$; е) $7x-2,4 < 0,4$;
 б) $-4(x+2) > x-2$; г) $\frac{1}{2}(x-4) \geq 0,5x-2$; ё) $17-x > 10-6x$;
 в) $3(x-1) < x+3$; д) $\frac{1}{5}(x+10) \leq \frac{4}{5}x+3$; ж) $2x-17 \leq -27$.

116. а) $\frac{x-1}{2x+4} > 0$; б) $\frac{x-1}{3x+9} \geq 0$; г) $\frac{13x-1}{2} < 4x$;
 б) $\frac{x-2}{-3x+6} < 0$; г) $\frac{x-2}{3x-12} > 0$; д) $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} \leq 2$.
117. а) $(x+8)(x-5) > 0$; е) $-\left(x + \frac{1}{7}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) \geq 0$
 б) $(x-14)(x+10) < 0$; ё) $(6+x)(3x-1) \leq 0$;
 в) $(x+25)(x-30) < 0$; ж) $(7x+21)(x-3,5) \leq 0$;
 г) $(x+6)(x-6) > 0$; з) $(8-x)(x-0,3) \geq 0$;
 г) $(x-2)(x-5)(x-12) > 0$; и) $x^2+4x \geq 0$
 д) $(x+7)(x+1)(x-4) < 0$; к) $x^2-x < 0$.
118. а) $(x-2)(x-3) > 0$; б) $(x+1)(2x-1) \leq 0$; в) $x(x-1)^2 > 0$;
119. Графики функцияро созед:
 а) $y = |1-x^2|-1$; г) $y = x^2|x|$;
 б) $y = |x^2-9x|+6x+2$; д) $y = x^2-|x-1|+1$;
 в) $y = x^2-|x^2-3|+2$; е) $y = 2x^2-2|x|$;
 г) $y = |x^2-2|+1$; ё) $y = |2x^2-x|$.
120. Бо методи фосилаҳо нобаробариҳо ҳал кунед:
 а) $x^2 \geq x$; г) $(x^2-5x+4)(x^2-1) > 0$;
 б) $\frac{4}{9} \leq x^2$; д) $4x^3-x < 0$;
 в) $x^3-16x < 0$; е) $(x-1)(x^2-3x+8) < 0$;
 г) $(x^2-1)(x+2) < 0$;

Машқҳо барои такрор

121. Касрҳоро ихтисор кунед:
 а) $\frac{2x^2+x-6}{6x^2-11x+3}$; б) $\frac{8m^3+27}{6m^2+13m+6}$; в) $\frac{(1-3a)^2}{3a^2+5a-2}$.
122. Муодиларо ҳал кунед:
 а) $(x-1)^2(x+1)^2 = (x+2)^2 2x+2$;
 б) $(2x-3)(2x+3)-1 = 5x+(x-2)^2$.
123. Координатаҳои қуллаи параболаро ёбед:
 а) $y = x^2-12x+53$; б) $y = x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{41}{16}$.
124. Китоб 160 саҳифа дорад. Далер рӯзи якум 52 саҳифа, рӯзи дуюм назар ба рӯзи якум 16 саҳифа зиёдтар хонд. Чанд фоизи китоб нохонда монд?
125. Ду бригада якҷоя 1787 сентнер чавдор ғундоштанд. Бригадаи якум 46 га ва бригадаи дуюм 35 га чавдор ғундоштанд. Агар чавдори аз 8 га ғундоштаи бригадаи якум назар ба чавдори аз 5 га ғундоштаи бригадаи дуюм 58 сентнер зиёд бошад, ҳар як бригада алоҳида аз 1 га ба ҳисоби миёна чандсентнерӣ чавдор ғундоштаанд?

МАЪЛУМОТИ ТАЪРИХИ

Истилохи «функсия»-ро дар илм риёзидони немис Г. Лейбнитс (1646-1716) чорӣ кардааст. Дар тадқиқоти ӯ функсия бо график алоқаманд аст.

Дар инкишофи минбаъдаи ин мафҳумҳо методи координатаҳо, ки риёзидони фаронсавӣ П.Ферма (1601-1655) ва Р.Декарт (1596-1650) ихтироъ карда буданд, роли калон бозид. Методи координатаҳо барои сохтани графики функсияҳо ва ҳалли графикаи муодилаҳо васеъ истифода мешуданд.

Фаҳмиши функсия чун ифодаи аналитикӣ, яъне ифодаҳое, ки аз тағйирёбандаҳою ададҳо бо ёрии ин ё он амали аналитикӣ ташкил шудаанд, ба Л.Эйлер (1707-1783) ва И.Бернулли (1667-1748) тааллуқ дорад. Дар ин давра гуруҳҳои муҳимтарини функсияҳо тадқиқ шуданд, ки онҳо дар яке аз соҳаҳои риёзиёт –**анализи математикӣ** омухта мешавад.

Л. Эйлер мафҳуми функсияро чун вобастагии як бузургии тағйирёбанда ба бузургии тағйирёбандаи дигар инкишоф дод. Ин нуқтаи назар дар асарҳои риёзидони рус Н.И. Лобачевский (1792-1856), риёзидони немис П. Дирихле (1804-1859) ва дигар олимони инкишоф дода шуд.

Лейбнитс ин истилоҳро барои номи параметрҳои гуногун, ки бо мавқеи нуқта дар ҳамворӣ алоқаманд аст, дохил карда буд. Дар рафти мукотаба Лейбнитс ва шогирдаш–математики швейтсариягӣ И.Б.Бернулли тадриҷан функсияро чун ифодаи аналитикӣ дарк кардаанд ва онро соли 1718 Лейбнитс таъриф додааст.

Л. Эйлер дар китоби худ «Муқаддимаи анализ» (соли 1748) таърифи функсияро ин тавр баён кардааст: «Функсияи микдори тағйирёбанда ифодаи аналитикиест, ки бо ягон тарз аз ин микдори тағйирёбанда ва ададҳо ё микдори доимӣ таркиб ёфтааст». Л. Эйлер инчунин ишораҳои ҳоло барои функсияҳо қабулшударо низ чорӣ кардааст.

Таърифи ҳозиразамони функсияро, ки дар он ин мафҳум аз тарзи додашавӣ озод аст, бешабар аз ҳамдигар риёзидони рус Н.И.Лобачевский (соли 1834) ва математики немис Л. Дирихле (соли 1837) баён кардаанд.

Гояи асосии ин таърифҳо ин аст: ба ҳар як қимати x қимати муайяни y мувофиқ гузошта хоҳад шуд.

Олими бузурги англис, риёзидон ва физик И. Нютон ба вақт вобаста будани координатаҳои нуқтаи ҳаракатнокро таҳқиқ карда, амалан ба таҳқиқи функсия машғул шуда буд. Гарчанде ин мафҳумро Нютон ба таври мушаххас чорӣ карда бошад ҳам, вале аҳамияти онро равшан дарк мекард. Масалан, соли 1676 ӯ қайд карда буд: «Агар аз муоинаи фигураҳо дур намешудам ва ҳамаро танҳо ба тадқиқи ординатаҳо намеовардам, натиҷаҳои умумиро

ноил намешудам», яъне Нютон амалан функцияҳои вақтро таҳқиқ карда буд.

Мафҳуми ҳозиразамони функцияи дорои соҳаҳои муайянӣ ва соҳаи қиматҳои дилхоҳ, асосан, дар нимаи аввали асри XX, ба туйфаҳои асарҳои асосгузори назарияи маҷмӯъ Г.Кантор (1845-1918) ташаққул ёфт.

Риёзидонҳо масъалаҳои мушаххас ва мураккаби риёзиро ҳал карда, ба мафҳуми функция омаданд.

Инкишофи минбаъдаи мафҳуми функция ба омӯзиши маҷмӯъҳо, ки элементҳои онҳо на фақат аз ададҳо, балки аз объектҳои дилхоҳи табиат иборатанд, алоқаманд аст.

Машқҳои иловагӣ ба боби 1 **Ба параграфи 1**

Соҳаи муайянии функция ёфта шавад (126-127).

126. а) $y = \frac{3}{x^2-1}$; в) $y = \sqrt{1-x}$; г) $y = \sqrt{3-x^2}$;
 б) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; г) $y = \sqrt{3-x}$; д) $y = \frac{x-1}{x^2+5x} \sqrt{2x+1}$.
127. а) $y = \sqrt{2x-4}$; г) $y = \sqrt{-3(1-5x)}$; е) $y = \sqrt{x^2} - \sqrt{3x-1}$;
 б) $y = \sqrt{4-6x}$; г) $y = \sqrt{3-2x} + \sqrt{1-x}$; ё) $y = 2\sqrt{16-x^2}$;
 в) $y = \sqrt{\frac{1+3x}{2}}$; д) $y = \sqrt{6-x} + \sqrt{3x+9}$; ж) $y = \frac{3}{\sqrt{3x-4}}$;
128. Ягон функцияро нависед, ки соҳаи муайяниаш:
 а) $x=2$; б) $x \neq \pm 1$; в) $[1; \infty)$ бошад.
129. Функцияро, ки дар расмҳои 55 ва 56 (ниг. ба саҳ. 64) тасвир шудаанд, ба намуди формула нависед.
130. Нулҳои функцияро ёбед (агар онҳо мавҷуд бошанд):
 а) $y = \frac{3x+12}{30}$; б) $y = \frac{6}{2-5x}$; в) $y = \frac{x^2-4}{5}$;
131. Нулҳои функцияи хаттиро ёбед:
 а) $y=x+5$; в) $y=6(x-1)+2$ д) $y=0,01x+1$;
 б) $y=1-x$; г) $y = \frac{2}{3}(x-1) + 1$; е) $y=0,01x-20$
132. Вобастагии x ва y намуди $ax+by=1$ -ро дорад. Қиматҳои параметрҳои a ва b ёфта шавад, агар маълум бошад, ки нуқтаҳои $(2;-1)$ ва $(-4; 3)$ дар графики ин вобастагӣ меҳобанд.
133. Вобастагии x ва y намуди $(x-a)(y-b)=1$ -ро дорад. Қимати a ва b ёфта шавад, агар маълум бошад, ки ибтидои координата ва нуқтаи $(3; \frac{3}{2})$ дар графики ин вобастагӣ меҳобанд.

134. Барои кадом қиматҳои аргумент функсияи $y=x^2+x-2$
 а) ба нул; б) калон аз нул; в) хурд аз нул мешавад.
135. Чуфт ё токии функсияҳои зерин муайян карда шавад:
 а) $y = \frac{x^2+x}{x^2-x}$; б) $y = \frac{x^2+x}{x+1}$; г) $y = \frac{x}{x^2+1}$; е) $y=(x-3)^2+(x+3)^2$
 б) $e = x + \frac{1}{x}$; г) $y = -\frac{1}{x^2}$; д) $y = \frac{x^2}{x+1}$.
136. Функсияи $y=kx+b$ дар кадом ҳолат афзуншаванда ва дар кадом ҳолат камшаванда мебошад?
137. Кадоме аз функсияҳои хаттии а) $y=x-3$; б) $y=-x+4$; в) $y=-5x+3$; г) $y=x-1$; д) $y=2-4x$; афзуншаванда ва кадоме камшаванда мебошад?
138. Функсия бо формулаи $y=mx+n$ дода шудааст. Барои кадом қиматҳои m функсия афзуншаванда мешавад?
139. Функсияи $y = \frac{1}{x^2}$ барои кадом қиматҳои x афзуншаванда аст?

Ба параграфи 2

140. Квадрати пурра ҷудо кунед:
 а) $x^2-8x-65$; г) $x^2-2x+35$; е) $ax^2+8ax-2$;
 б) x^2-6x+8 ; д) $x^2+11x+30$; ё) $ax^2-4a^2x+4a^3+3$;
 в) $x^2+8x+15$; ж) $(x-2)(x-4)$; з) $(x+a)(x+b)$
141. Сеаъзогиро ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед:
 а) $5x^2-15x+10$; б) $-3x^2-3x-18$; г) $10x^2-3x-1$;
 д) $\frac{1}{5}x^2 - 3x + 10$; е) $-\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{7}{2}$; ж) $x^2 - \frac{5}{2}x + 1$;
142. Ибтидо кунед, ки сеаъзогии квадратии x^2+x+1 барои қиматҳои дилхоҳи x мусбат аст.
143. Дар тарафҳои кунҷи рост ба самти қуллаи он ду сақочаи A ва B мунтазам ҳаракат мекунам. Суръати сақочаи A назар ба суръати сақочаи B ду маротиба зиёд аст. Пас аз 10 сония масофаи байни сақочаҳои A ва B ба 130 м баробар мешавад. Агар дар ибтидои ҳаракат сақочаи A аз қуллаи кунҷ дар масофаи 270 м ва сақочаи B дар масофаи 125 м воқеъ бошанд, суръати ҳар як сақочаро ёбед.
144. Сеаъзогии квадратиро ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед:
 а) x^2-7x+6 ; б) x^2-x-20 ; в) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$; г) $2x^2+2x-4$;
145. Касрро ихтисор кунед:
 а) $\frac{x^2+x-2}{2x-2}$; б) $\frac{4x^2-20x+24}{x^2-5x+6}$; в) $\frac{x^2+4x-5}{2x+10}$; г) $\frac{8x^2-16x+24}{2x-6}$

Ба параграфи 3

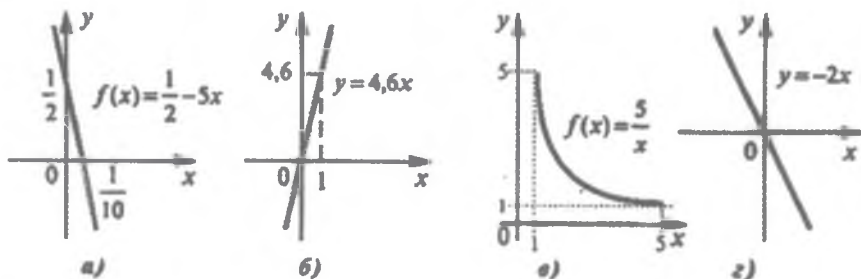
146. а) Параболаи $y=2x^2$ ба боло 7 воҳид ба тарафи чап 5 воҳид кучонида шуд. Параболаи ҳосилшуда графики кадом функция аст.
 б) Агар графики функцияи $y=2(x-1)^2$ -ро аз рӯи тири симметрияш 3 воҳид ба поён кучонем, графики кадом функция ҳосил мешавад?
147. Қуллаи параболаи $y=2x^2-3x+2$ дар кадом нуқта ҷойгир мешавад?
148. Параболаи $y=x^2+4x+3$ тири Oy ва Ox -ро дар кадом нуктаҳо мебурад?
149. Қиматҳои a ва b -ро ёбед, агар маълум бошад, ки графики функцияи $y=ax^2+bx-18$ аз нуқтаҳои $M(1; 2)$ ва $N(2; 10)$ мегузарад.
150. Ҳосиятҳои функцияҳоро истифода карда, графики онро созед:
 а) $y=x^2-3x-3$; б) $y=-3x^2+4x-2$; в) $y=x|x|-2x$.
151. Вобастагии x ва y бо муодила дода мешавад. Қиматҳои p ва q муайян карда шаванд, агар:
 а) дар ҳолати $x=-2$ будан, y ба нул мубаддал шавад;
 б) дар ҳолати $x=0$ будан, y қимати хурдтарини 3-ро доро шавад;
 в) дар нуқтаи $(-6; 0)$ графики функция ба тири Ox расад.
152. Экстремум ва экстремали функцияро ёбед:
 а) $y=4x^2-56x+194$; в) $y=-5x^2+40x-73$; г) $y=9x^2-36x+41$;
 б) $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{37}{4}$; г) $y=10x^2-20x-1$; д) $y=3x^2-12x+12$;
153. а) $x^2-3x-10>0$; б) $2x<x^2$; в) $x^2-10x-39>0$.
154. а) $2x^2+1>1$; б) $9x^2+12x+16<0$; в) $x>4x^2$.
155. Нобаробариро бо методи фосолаҳо ҳал кунед:
 а) $2x^2+13x-7>0$; в) $6x^2-13x+5\leq 0$; г) $3x^2-2x>0$.
 б) $-9x^2+12x-4<0$; г) $-2x^2-5x+18\leq 0$.
156. Барои кадом қиматҳои m нобаробарӣ қиматҳои дилхоҳи x дуруст аст:
 а) $x^2-4x+2m>0$; г) $\frac{1}{24}x^2+mx-m+1>0$;
 б) $x^2-(m+2)x+8m+1>0$; г) $mx^2-12x-5<0$;
 в) $x^2+4x+(m-2)^2\geq 0$; д) $(m+2)x^2+5x-4<0$?
157. Графики функцияро созед:
 а) $y=|-x^2-2x+5|$; б) $y=(5-|x|)(x+1)$.
158. Нобаробариро ҳал кунед:
 а) $-x^2+x-2<0$; в) $\frac{x^2}{10}+2>\frac{7x}{10}$;
 б) $3x-x^2-4<0$; г) $\frac{x^2}{3}-\frac{2x}{3}>\frac{3x-10}{4}$.
159. Дарозии росткунча аз бари он 5 м зиёд аст. Бари росткунча бояд ҷӣ гуна бошад, то ки масоҳати он аз 36 м^2 калон шавад?

ҶАВОБҲО

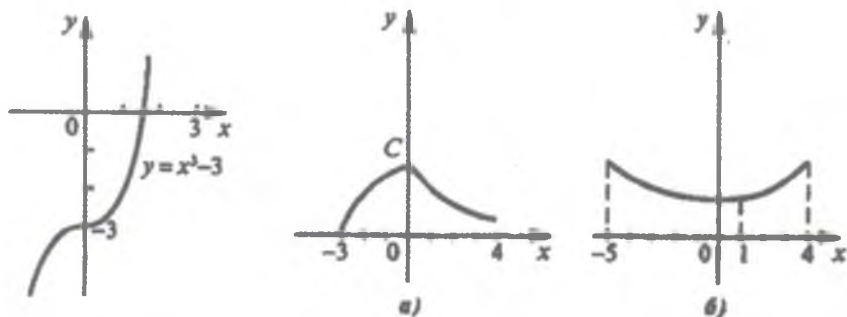
1. а) 7; б) 7; в) 2 г) $\frac{13}{4}$; 2. а) 48; б) 122; в) -22; г) -60. 3. а) $-\frac{11}{5}$; б) $\frac{6}{5}$; в) 0; г) $-\frac{4}{5}$; Ғ) $\frac{11}{5}$. 4. а) 1; б) $\frac{1+a^2}{1-a^2}$; в) -3; г) -2; Ғ) $-\frac{1}{3}$. 5. а) 0; -1,5; б) $\frac{1}{3}\sqrt{6}$; $-\frac{1}{3}\sqrt{6}$; в) 0; $\frac{4}{5}$; г) 0; $\frac{1}{2}$; Ғ) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; д) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. 6. а) 0; б) 1 $\frac{7}{24}$. 7. $\frac{2}{5}$. 8. а), б), г) Маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ; в) маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ, ғайр аз 3; г) маҷмӯи ҳамаи ададҳо, ғайр аз 5 ва -2; д) $x \geq 4$; е) $x \geq -10$; ё) $x \geq -100$. 9. а) $y = \frac{2}{x-10}$ б) $y = \frac{x}{(x-2)(x-3)}$; в) $y = \sqrt{x}$; г) $y = \sqrt{x-20}$. 10. а), б) Маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ. 11. а) 0; -9; б) -5; в) 0; 9 г) 1. 12. Расми 33. 13. Расми 34.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-30	-11	-4	-3	-2	5	24

14. а) $x=3$; $y=-1$; б) $x=7$ $y=5$. 15. а) (3,4; ∞); б) (1,8; ∞). 16. а) ± 8 ; б) 0; 1. 17. 730 кг. 18. а) Ҷуфт; б) тоқ; в) ҷуфт; г) тоқ; Ғ) тоқ. 19. а) тоқ; б) ҷуфт; в) на ҷуфт на тоқ; г) тоқ. 20. а) На ҷуфт на тоқ; б) ҷуфт в) тоқ; г) ҷуфт. 21. а), б), г) тоқ; в) ҷуфт.

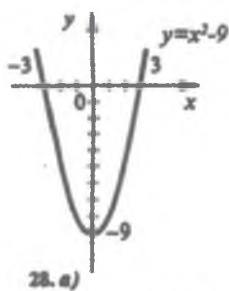


Расми 33

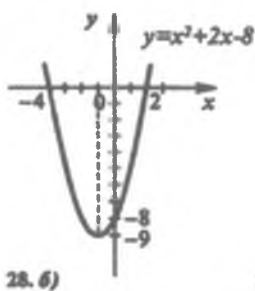


Расми 34

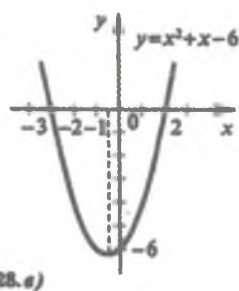
Расми 35



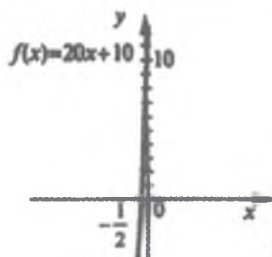
Расми 36



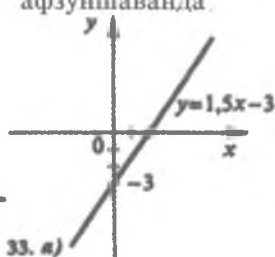
Расми 37
афзуншаванда



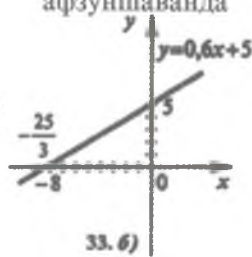
Расми 38
афзуншаванда



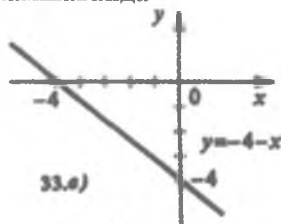
Расми 39
камшаванда



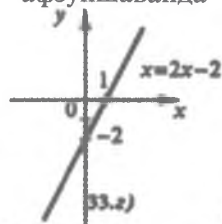
Расми 40
афзуншаванда



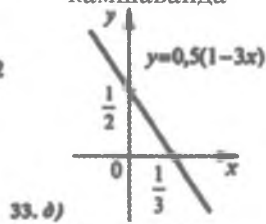
Расми 41
камшаванда



Расми 42

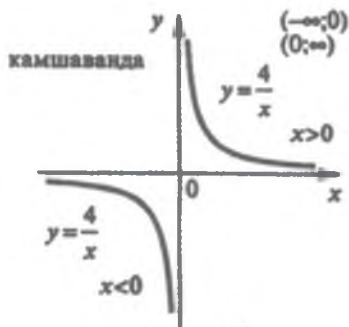


Расми 43

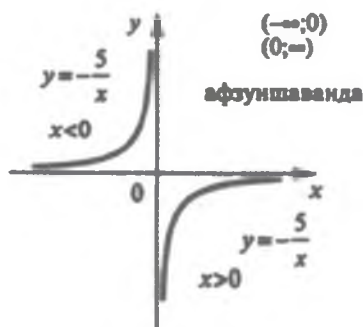


Расми 44

22. а) $1\frac{2}{3}$; б) 24; в) 7; г) 2. 23. а) $\frac{2}{91}$; б) $\frac{1}{7} \cdot 26^5$; в) 2; г) $\frac{1}{2}$. 24. а) $a(a^2 - 2a - 1)$; б) $(a - c)(x - y)$; в) $3ax(a + 2x)$; г) $3a^3(3a - 4b)$. 25. 15 соат. 26. а) (0; 4); б) (9; 13); в) (4; 9). 27. Расми 35, а, б. 28. Расми 36, 37, 38. 29. а) 15; в) -2; г) нул надорад. 30. а) Дорад $x = 33\frac{1}{3}$; б) дорад $x=0$ ва $x=2$; в) дорад $x=6$; г) надорад; г) надорад. 31. а) $x=3$ нули функсия, барои $x < 3$ $f(x)$ -мусбат, барои $x > 3$ $f(x)$ -манфӣ; б) $x = -\frac{1}{2}$ нули функсия, барои $x > -\frac{1}{2}$ $f(x)$ -мусбат, барои $x < -\frac{1}{2}$ $f(x)$ -манфӣ. Расми 39. 33. Расми 40, 41, 42, 43, 44: а) афзуншаванда; б) камшаванда; в) камшаванда; г) афзуншаванда; г) камшаванда. 34. а) $x=-6$; б) $x > -6$; в) $x < -6$. 35. Расми 45 ва 46. 36. а) $x=12$; б) $x = -\frac{9}{2}$. 37. 1; -5. 38. а) $\frac{1}{4}$; б) 22. 39. а) $-5a + 5ab^2$;



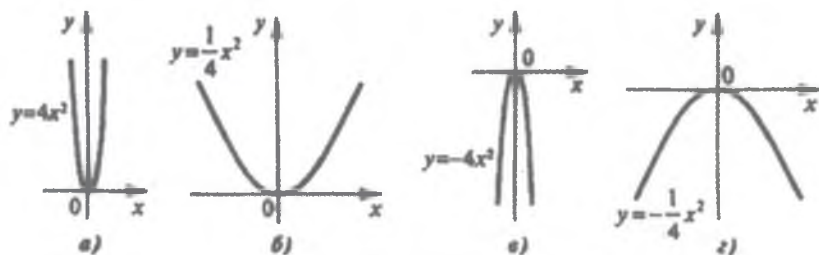
Рисун 45



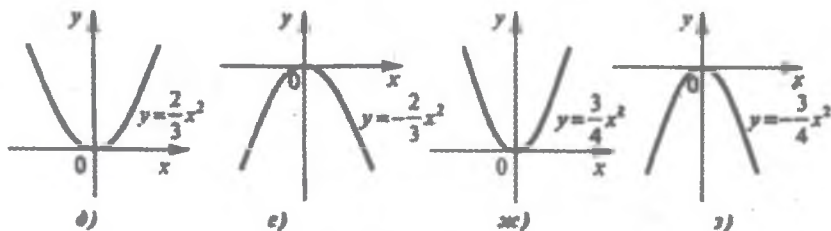
Рисун 46

- б) $6a(2a-3)$. 41. а) $(x-8)^2-80$; б) $(x-4)^2-81$; в) $3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2$; г) $(x-3)^2-1$.
 42. а) $\frac{1}{3}(x-6)^2+4$; б) $(x+3)^2+1$; в) $(x-1)^2-3$; г) $(x-1)^2-1$. 43. $(x-3)^2+2$
 хама вақт мусбат; $-[(x-10)^2+10]$ хама вақт манфӣ. 44. а) $(x-3)^2+1>0$; б) $5(x-1)^2\geq 0$; в) $-(x-10)^2\leq 0$; г) $-2\left[(x-4)^2+\frac{1}{2}\right]<0$.
 45. а) $(x-2)^2+3$; б) $(x+1)^2-2$; в) $-2(x+1,5)^2+1$. 46. а) $-\frac{1}{2}$; 3; б) 1; $1\frac{2}{3}$; в)
 $\frac{1}{6}$. 47. 24 км/соат. 48. а) Ҳамаи ададҳо, ғайр аз 7; б) ҳамаи адад-
 ҳо, ғайр аз -36. 49. а) $(x-1)(x+7)$; б) $(2a-x+y)(2a+x-y)$; в) $6(x+2y)^2$.
 50. а) $(x-3)(3x-1)$; б) $(m-1)(2m-1)$; в) $(x-1)(x+2)$. 51. а) $4(b+1)(b-1)$
 $(a+b)(a-b)$ б) $\frac{1}{6}(x+1)(x+2)$; в) $(1-y)(y-15)$. 52. а) $(x-1)(2x-3)$;
 б) $2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$; в) $-(3x-2)^2$; г) $(4a+3)^2$. 53. а) $(0,5m-2)^2$; б) $(2-m)(m-3)$;
 в) $(3x-1)(x+2)$; г) $(3x-2)(2x-3)$. 54. а) $\frac{3}{x+5}$; б) $\frac{2x+1}{x}$; в) $\frac{m-3}{m-2}$. 55. а)
 $\frac{5}{2a+9}$; б) $2\frac{b-3}{b+5}$; в) $\frac{y+4}{y+9}$; 56. а) $\frac{2a+1}{3}$; б) $\frac{2y+1}{y-3}$; в) $-\frac{x+6}{x+5}$. 57. а) $\frac{4}{3x-1}$; б)
 $\frac{1-p}{p+2}$; в) $\frac{2(m-2)}{m+4}$. 60. 3; $1\frac{2}{7}$; $1\frac{1}{6}$. 61. 6. 62. а; $\frac{1}{a}$. 63. 14,4. 64. 1. 65. 12; 13.
 66. 0,6. 67. а) $\frac{1}{a^8}$; б) $\frac{4}{5}ax^2$. 68. а) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; б) -20; 5. 69. а) 2,8 кг; 3,5 кг; 5
 кг; б) 229,3 сомони ва 230 сомони 70. а) Ба поён; б) ба боло; в) ба
 боло; г) ба поён. 71. (0; 4), $x=0$ тири симметрӣ; б) (2; 3), $x=-2$ тири
 симметрӣ; в) (2; -12); $x=2$ тири симметрӣ; г) $\left(\frac{2}{5}; -\frac{9}{5}\right)$; $x=\frac{2}{5}$; тири
 симметрӣ; г) $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{64}\right)$; $x=\frac{1}{6}$ тири симметрӣ; д) $\left(\frac{3}{7}; \frac{16}{7}\right)x=\frac{3}{7}$ - тири си-
 метрӣ. 72. а) $\left(1; 1\frac{1}{3}\right)$ б) 0,6; 1; в) $\left(2; 2\frac{1}{3}\right)$; г) $2\frac{1}{2}$; 2. 73. а) (0; 1); б) (0; 2); в) (0; 4);

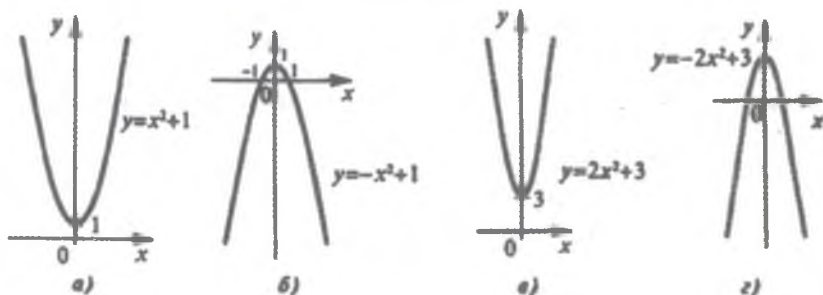
г) $(0; 5)$. 74. а) $(-\frac{1}{2}; 3)$; б) намебурад; в) $(-1; -0,8)$ г) $\frac{1}{6}$. 75. а) $(3; 0)$; б) $(\frac{1}{2}; 0)$; в) $(1; 0)$; г) $(2; 0)$. 76. а) $(-\infty; \frac{1}{2})$ - афзуншаванда; б) $(-\infty; \frac{7}{6})$ камшаванда; в) $(-\infty; 3)$ - афзуншаванда; $(3; \infty)$ - камшаванда; г) $(-\infty; -2)$ - афзуншаванда; $(-2; \infty)$ - камшаванда; д) $(-\infty; -1)$ - камшаванда; $(-1; \infty)$ - афзуншаванда; е) $(-\infty; 1)$ - афзуншаванда $(1; \infty)$ - камшаванда. 77. а) $\frac{a-b}{a+b}$; б) $\frac{y-x}{y+x}$; в) $\frac{1}{m-n}$. 78. а) 1; б) -1. 79. 48 саҳифа; 52 саҳифа.



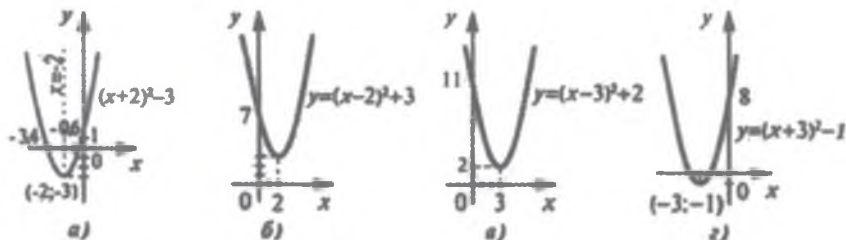
Расми 47



Расми 48

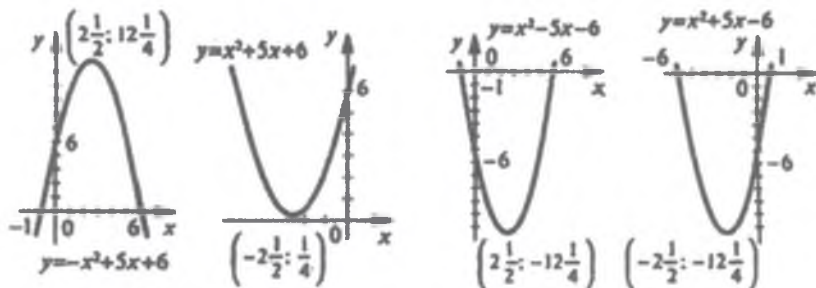


Расми 49

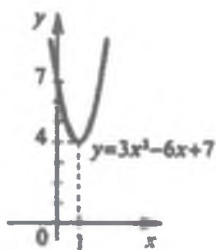


Расми 50

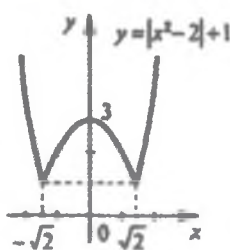
80. а) $(1-y)(y-5)$; б) $(1-x)(x+6)$; в) $(x-1)(2x-3)$; г) $(y+1)(5y-3)$. 81. Қимати калонтарин: б); г); ф). Қимати хурдтарин: а); в); с). 82. а) $y_{\min}^2 = -16$; б) $y_{\max} = 2$; в) $y_{\min} = 0$; г) $y_{\max} = 3$; ф) $y_{\min} = -\frac{1}{2}$ д) $y_{\min} = 1$. 83. а) 0; б) $\frac{1}{2}$; в) 2; г) 0; ф) 1; д) -3. 84. а) $y_{\min}(-2) = -1$; б) $y_{\max}(-2) = -1$; в) $y_{\min}(-3) = 1$; г) $y_{\min}(2) = -1$; ф) $y_{\min}(2) = 1$; д) $y_{\min}(3) = 3$. 85. а) $\frac{1-a}{1-2a}$; б) $x^2 + x$. 86. а) 4; -16; б) 9; -5. 87 а) Ба поён; б) ба боло. 88. 1920 нафар. 89. Расми 47, 48. 90. Расми 49. 91. Расми 50. 92. а) Расми 51. 93. Расми 52. 94. а) -2; 2; б) -1; -4, 7; в) -2; -3. 95. а) 4; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{17}{55}$. 96. а) 150 кг, б) 960м. 97. а) $(5; \infty)$; б) $(-\infty; -4) \cup (2; \infty)$; в) -2; 1). 98. а) $y_{\min}(3) = 2$; б) $y_{\max}(-2) = 3$; в) $y_{\min}(5) = 5$. 99. а) $(-\infty; 1) \cup (4; \infty)$; б) $(-4; 0)$; в) $(-\infty; -1,5) \cup (5; \infty)$. 100. а) $(-2\frac{1}{3}; 3\frac{3}{4})$; б) $(-\infty; 0) \cup (4; \infty)$; в) $x = -3$.



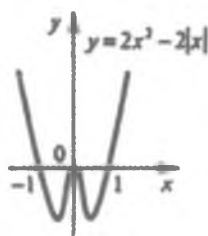
Расми 51



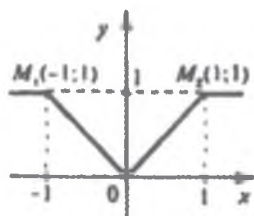
Расми 52



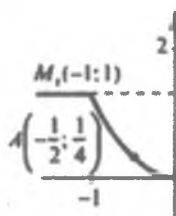
Расми 53



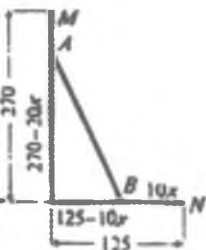
Расми 54



Расми 55



Расми 56



Расми 57

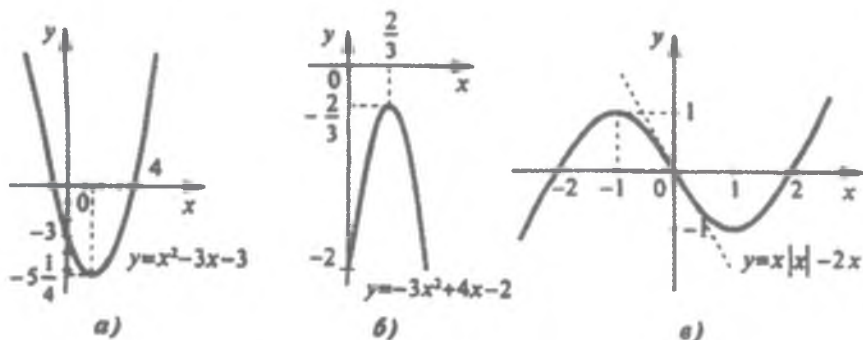
101. а) Ҳал надорад; б) x -адади ҳақиқии ихтиёрӣ; в) $[-9; -4]$. 102. б) $(-\infty; +\infty)$; в) адади ҳақиқии ихтиёрӣ. 103. а) $(-\infty; -2) \cup (5; \infty)$; б) $x \neq 1,5$; в) x -адади ҳақиқии ихтиёрӣ. 104. а) $(-\infty; -1) \cup (2; \infty)$; б) $(-\infty; 1] \cup [4; \infty)$; в) $(-\infty; \frac{-9-\sqrt{41}}{2}] \cup [\frac{+9+\sqrt{41}}{2}; \infty)$. 105. а) $(3; 6)$; б) x -адади ҳақиқии ихтиёрӣ; в) $x \in (-\infty; 11] \cup [1; \infty)$. 106. а) Аз 5 см хурд; б) дарозияш бояд аз 3 см калон шавад. 107. а) $(-\infty; -5] \cup [5; \infty)$; б) $[-7; 1]$; в) $(-\infty; \frac{1}{2}] \cup [1; \infty)$; г) $[-\frac{1}{8}; 0] \cup [\frac{1}{8}; \infty)$. 108. а) $m > 1$; б) $m > 11$; в) $m < -7,2$; г) $0 < m < 28$. 109. $a = \frac{1}{8}$, $b = 1$, $c = -6$. 110. а) 3; б) 5. 111. а) $(\frac{5-\sqrt{13}}{2}; \frac{5+\sqrt{13}}{2})$; б) $(4; \infty)$. 112. $1\frac{3}{7}$. 113. 7 ва 5. 114. 10 ва 6. 115. а) $(5; \infty)$; б) $(-\infty; -\frac{6}{5})$; в) $(-\infty; 3)$ г) $(-\frac{9}{5}; +\infty)$; г) $x \in (0; \infty)$; д) $(-\frac{5}{3}; +\infty)$; е) $(-\infty; 0,4)$; ё) $(-1,4; \infty)$; ж) $(-\infty; -5]$. 116. а) $(-\infty; -2) \cup (1; \infty)$; б) $(-\infty; 2) \cup (2; \infty)$; в) $(-\infty; -3) \cup [1; \infty)$; г) $(-\infty; 2) \cup (4; \infty)$; ф) $(-\infty; 0,2)$; е) $(-\infty; 40]$. 117. а) $(-\infty; -8) \cup (5; \infty)$; б) $(-10; 14)$ в) $(-25; 30)$; г) $(-\infty; -6) \cup (6; \infty)$; ф) $(2; 5) \cup (12; \infty)$; д) $(-\infty; -7) \cup (-1; 4)$; е) $[-\frac{1}{3}; -\frac{1}{7}]$; ё) $[-6; \frac{1}{3}]$; ж) $[-3; 3,5]$; з) $[0,3; 8]$; и) $(-\infty; -4) \cup (0; 4)$; к) $(0; 1)$. 118. а) $(-\infty; 2) \cup (3; \infty)$; б) $[-1; 0,5]$; в) $(0; 1) \cup (1; \infty)$. 119. г) Расми 53; ё) расми 54. 120. а) $(-\infty; 0] \cup [1; \infty)$; б) $(-\infty; -\frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}; \infty)$; в) $(-\infty; -4) \cup (0; 4)$; г) $(-\infty; -2) \cup (-1; 1)$; ф) $(-\infty; -1) \cup (4; \infty)$; д) $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (0; \frac{1}{2})$; е) $(-\infty; 1)$. 121. а) $\frac{x+2}{3x-1}$; б) $\frac{4m^2-6m+9}{3m+2}$; в) $\frac{3a-1}{a+2}$. 122. а) $1-\sqrt{5}$; $1+\sqrt{5}$; б) -2 ; $2\frac{1}{3}$. 123. а) $(6; 17)$; в) $(\frac{3}{4}; 2)$. 124. 25%. 125. 21,5 сентнер аз 1 га ва 22,8 сентнер аз 1 га. 126. а) $x \neq \pm 1$; б) $[-\infty; 1) \cup (1; \infty)$ в) $(-\infty; 1]$;

г) $(-\infty; 3]$; р) $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$; д) $x \neq 0, x \neq -5$. 127. а) $[2; \infty)$; б) $(-\infty; \frac{2}{3})$; в) $[-\frac{1}{3}; \infty)$; г) $[\frac{1}{5}; \infty)$; р) $(-\infty; 1]$; д) $[-3; 6]$; е) $[\frac{1}{3}; +\infty)$; ё) $[-4; 4]$; ж) $[\frac{4}{3}; \infty)$. 128. Маса-

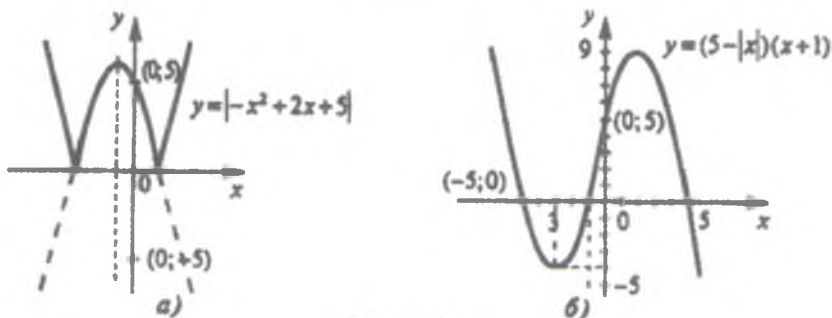
лан, а) $y = \frac{3}{x-2}$; б) $y = \frac{3x}{x^2-1}$; в) $y = \sqrt{x-1}$. 129. $y = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \leq -1 \\ -x, & \text{агар } x \in [-1; 0] \\ x, & \text{агар } x \in [0; 1] \\ 1, & \text{агар } x \geq 1 \end{cases}$

Расми 55. $y = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \leq -1 \\ x^2, & \text{агар } x \in [-1; 1] \\ x, & \text{агар } x \geq 1 \end{cases}$ Расми 56. 130. а) -4; б) надорад; в) ± 2 . 131. а) -5; б) 1; в) $\frac{2}{3}$; г) $-\frac{1}{2}$; р) -100; д) 2000. 132. $a=2; b=3$. 133. $a_1=1;$

$b_1=1; a_1=2; b_2=\frac{1}{2}$. 134. а) $x=-2$ ва $x=1$; б) $y>0$, агар $x \in (-\infty; -2)$ ё $x \in (1; \infty)$ в) $y<0$, агар $x \in (-2; 1)$. 135 а) чуфт; б) ток; г) чуфт; р) ток; д) на чуфт на ток; е) чуфт. 136. $k>0$ -афзуншаванда, $k<0$ камшаванда. 137. а) афзуншаванда; б) камшаванда; в) камшаванда; г) афзуншаванда; р) камшаванда. 138. а) $m>0$.



Расми 58



Расми 59

139. $x < 0$ афзуншаванда. 140. а) $(x-4)^2-81$; б) $(x-3)^2-1$; в) $(x+4)^2-1$; г) $(x-1)+34$; д) $\left(x + \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$; е) $(x-3)^2-1$; ж) $a(x+4)^2-16$; з) $a(x-2a)^2+3$; 141. а) $5(x-1,5)^2-1,25$; б) $\frac{1}{5}(x-7,5)^2-1,25$; в) $3(x+3)(x-2)$; г) $-\frac{1}{2}(x+1)(x-7)$; д) $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{5}\right)$; е) $(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$. 142. $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. 143. Расми 57. $(270-20x)^2+(125-10x)^2=130^2$; 15м/сония, 38,2 м/сония. 144. а) $(x-6)(x-1)$; б) $(x-5)(x+4)$; в) $\frac{1}{2}(x-3)(x+2)$; г) $2(x-1)(x+2)$. 145. а) $\frac{x+2}{2}$; б) 4; в) $\frac{x-1}{2}$; г) $4(x+1)$. 146. а) $y=2(x+5)^2+7$; б) $y=2(x-1)^2-3$. 147. $\left(\frac{3}{4}; \frac{7}{8}\right)$. 148. Оу: (0; 3); б) $y=2(x-1)^2-3$. Ох: (-3; 0) ва (-1; 0). 149. $a=-6$; $b=26$. 150. Расми 58. 151. а) $p=2$, $q=4$; б) $p=0$, $q=3$; в) $p=12$, $q=36$. 152. а) $y_{\min}(7)=-2$; б) $y_{\min}(5)=3$; в) $y_{\max}(4)=7$; г) $y_{\min}(1)=11$; д) $y_{\min}(2)=5$; е) $y_{\min}(2)=0$. 153. а) $(-\infty; -2) \cup (5; \infty)$; б) $(-\infty; 0) \cup (2; \infty)$; в) $(-\infty; -3) \cup (13; \infty)$. 154. а) $(-\infty; \infty)$; б) ҳал надорад; в) (0; 0,25). 155. а) $(-\infty; -7) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$; б) $x \neq \frac{2}{3}$; в) $\left[\frac{1}{2}; 1\frac{2}{3}\right]$; г) $(-\infty; -4\frac{1}{2}) \cup [2; \infty)$; д) $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$. 156. а) $m > 2$; б) $0 < m < 28$; в) $m \leq 0$ ва $m \geq 4$; г) $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{3}$; д) $m < -7,2$; е) $m < -3\frac{9}{16}$. 157. Расми 59. 158. а) $(-\infty; \infty)$; б) $(-\infty; \infty)$; в) $(-\infty; \infty)$; г) $(-\infty; \infty)$. 159. Аз 4 м калон.

Боби II МУОДИЛА ВА СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲО

§ 5. Муодилаҳои якномаълума

§ 6. Системаи муодилаҳои дуномаълума

§5. МУОДИЛАҲОИ ЯКНОМАЪЛУМА

12. Муодилаи бутун ва дараҷан он

Дар навбати аввал мафҳуми ифодаи бутунро ба хотир меорем. Чӣ тавре ки дар синфи 8 дидем, чунин ифода аз адалҳо ва тағйирёбандаҳо ба воситаи амалҳои ҷамъ, тарҳ, зарб, инчунин тақсим ба алақи аз нул фарқкунанда ва қавсҳо тартиб дода мешаванд. Масалан, ифодаҳои

$$\frac{2a}{2} - 3bc^2 + \frac{4abc}{5} \cdot (a^3 - b^3) \text{ ва } \frac{4x^2y}{9} + az$$

бутун мебошанд. Вале ифодаи

$$\frac{7mn}{4} + \frac{(m-3)^3}{p} + q^2$$

бутун нест, чунки дар он тақсим ба тағйирёбандаи p ҷой дорад. Хотирнишон мекунем, ки ягонагии намуни одитарики ифодаҳои бутунанд. Ба сифати мисол ифодаҳои зеринро овардан мумкин аст:

$$2xy, \quad x^3y, \quad \frac{3}{5}axz^4, \quad 0,1 \quad a^2b^3, \dots$$

Ақсон муодилаҳои

$$3(x+1)(x^3-2)=x^2+4(x-5), \quad (1)$$

$$\frac{x^3}{2} - \frac{x+4}{3} = 7x^2 - \frac{x}{4} \quad (2)$$

-ро дида мебароем.

Қисмҳои ҷан ва ростии муодилаҳои (1) ва (2) ифодаҳои бутунанд. Ин гуна муодилаҳо дар математика **муодилаҳои бутун** ном доранд. Ҳар гуна муодилаҳои намуни (1) ва (2)-ро ба шакли $P(x)=0$ -и ба муодилаҳои аввала баробарқувва, ки $P(x)$ -бисёраъзогии намунаи стандартӣ аст, овардан мумкин аст. Дар ҳақиқат, агар дар муодилаи (1) қавсҳо ро кушода, ҳарду тарафи муодилаи (2)-ро ба 12 зарб занем, он гоҳ баъди бо тартиби муайян иҷро кардани амалҳо ва ғабдилоти зарурӣ барои муодилаи (1)

$$3x^4 + 3x^3 - x^2 - 10x + 14 = 0 \quad (1')$$

ва барои муодилаи (2)

$$6x^3 - 84x^2 - x - 16 = 0 \quad (2')$$

-ро ҳосил мекунем. Бояд қайд кард, ки ин гуна амалиётро нисбати муодилаи бутуни дилхоҳ иҷро кардан мумкин аст. Ҳамин тарик, муодилаи бутуни дилхоҳи якномаълумаро бо муодилаи ба он баробарқувваи қисми чапаш бисёраъзогии намудаш стандартии $P(x)$ ва қисми росташ нул оварда, ҳал кардан мумкин аст.

Мафҳуми дараҷаи муодилаи бутунро дохил мекунем. Бо ин мақсад фарз менамоем, ки муодилаи якномаълума дар шакли

$$P(x) = 0 \quad (3)$$

дода шуда, мувофиқи гуфтаҳои болоӣ $P(x)$ -бисёраъзогии стандартӣ аст. Дараҷаи ин бисёраъзогиро дараҷаи муодилаи (3) меноманд. Дар ин асос, масалан, муодилаи $2x^4 - 7x + 3 = 0$ -муодилаи дараҷаи чоруми якномаълума мешавад.

Муҳокимарониҳои охириро ҷамъбаст намуда, тасдиқоти зеринро ҳосил мекунем: дараҷаи муодилаи бутуни дилхоҳ гуфта, дараҷаи муодилаи ба он баробарқувваи (3)-ро меноманд.

Аз ин ҷо бармеояд, ки дараҷаи муодилаҳои (1) ва (2) мувофиқан «чор» ва «се»-анд (нигаред ба муодилаи (1') ва (2')). Муодилаи $(x^4 - 2)^2 + 3x = x^8 + x + 1$ баъди табдилоти зарурӣ ба намуди $3x^6 - 4x^4 - x + 3 = 0$ оварда мешавад. Бинобар ин, он муодилаи бутуни дараҷааш шаш мебошад.

Мисоли дигарро дида мебароем. Бигзор, он муодилаи

$$(x-1)^2 = x^{10} - 2x + 3x^4 - 7$$

бошад. Қавсро кушода ҳамаи аъзоро ба қисми ҷан мегузаронем:

$$x^{10} - 2x^5 + 1 - x^{10} + 2x^5 - 3x^4 + 7 = 0.$$

Аъзоҳои монандро ислоҳ намуда, $-3x^4 + 8 = 0$ ҳосил мекунем. Азбаски дараҷаи муодилаи ҳосилшуда ба 4 баробар аст, пас дараҷаи муодилаи $(x^5 - 1)^2 = x^{10} - 2x^5 + 3x^4 - 7$ низ ба 4 баробар мешавад.

1. Кадом ифодаҳоро ифодаҳои бутун меноманд? Мисолҳо оред. Мисоли ифодаҳоеро оред, ки ифодаи бутунро ташкил намедиханд. 2. Оё якъзогиҳо ифодаи бутунро ташкил дода метавонанд? Мисолҳо оред. 3. Мафҳуми муодилаи бутунро бо мисолҳо шарҳ диҳед. 4. Оё муодилаи бутуни дилхоҳи якномаълумаро бо муодилаи ба он баробарқувваи $P(x) = 0$ иваз кардан мумкин аст? 5. Дар зери мафҳуми дараҷаи муодилаи бутун чиро мефаҳмед? Мисолҳои мушаххас оварда, дараҷаи муодилаи бутунро муайян кунед.

160. Оё ифодаҳои зерин бутунанд.

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \frac{9a}{2} - \frac{5b^2}{3} + 3a - \frac{1}{3}; & \text{в)} \frac{4ac^2bc^3}{3} - d + 0,5m^4; & \text{г)} xyz^3 - \frac{y^3}{5} + \frac{4}{x^4}; \\ \text{б)} 7a^2b^3 - \frac{a+b}{c} = \frac{c^2+1}{5}; & \text{г)} \frac{2}{c^2} - \frac{abc+3}{4} + \frac{a}{b}; & \text{д)} 10ab^3 + 7(a+b)^2? \end{array}$$

161. Кадоме аз муодилаҳои зерин муодилаи бутун мебошад:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \frac{2}{3}x + 8 = 0; & \text{г)} \frac{3x-1}{3} + x = \frac{7-x}{3} + 4; & \text{е)} \frac{4}{x^3} - \frac{x^3}{4} = x + 11; \\ \text{б)} 1-3x=5x^2; & \text{д)} 7y = \frac{y^2-4}{3} = 9-y^2; & \text{ё)} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 4. \\ \text{в)} 7x^2-4x+3=0 & \text{ж)} \frac{2}{z} - \frac{3+z}{z-1} = z^3; & \\ \text{г)} \frac{5}{x^2-1} - x = \frac{x(x-2)}{3}; & \text{з)} 2x^4 - 16x^2 = 5x^3 - \frac{2x}{3}; & \end{array}$$

162. Дараҷаи муодилаҳои бутуни зеринро ёбед:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} 3x^5-9x^{11}+5=0; & \text{ж)} 7x^3(7x-3)x^2+x=11; \\ \text{б)} x^9-15x^7+2x^2=0; & \text{з)} (x^2-3x+2)(x^2-4x+3)=0; \\ \text{в)} x^6+4x^3-8x=0; & \text{и)} 3(x^2+1)(x-1)=3x^3+7x+6; \\ \text{г)} \frac{2x}{3} - \frac{3x}{4} = 2; & \text{к)} \frac{x^4-1}{4} - \frac{x^2(x^2+1)}{2} = 3x^2 + 10. \\ \text{г)} (x-1)(x-2)(x-3)=0; & \text{қ)} \frac{7-2x}{2} + \frac{3x+5}{3} = 1 + 9x^2; \\ \text{д)} 5x^2 - \frac{2x-1}{3} = 7; & \text{л)} \frac{x(x+1)}{3} = x - 1; \\ \text{е)} 3x(x^2+5)=0; & \text{м)} (x^3-1)^2+3x^5=x^6-2x+1; \\ \text{ё)} (x-1)(x+1)-x(x+4)=9; & \text{н)} \frac{7x^3}{2} + 1 = (x^2-7) \cdot x^2 - 0,1x. \end{array}$$

Машқҳо барои такрор

163. Қимати ифодаро ёбед.

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \frac{3,76 \cdot 0,001}{0,01}; & \text{в)} \frac{0,2 \cdot 2,41}{0,1}; & \text{г)} 6\frac{1}{4} : \left(2\frac{1}{3} \cdot 9 - 20\right). \\ \text{б)} \frac{0,1 \cdot 6,14}{0,001}; & \text{г)} \left(5\frac{1}{3} - 2\frac{1}{6}\right) : \left(8 - 1,2 \cdot \frac{2}{3}\right); & \end{array}$$

164. Ифодаи $(7,8m-2,6n)-(2,3m-3,1n)$ -ро сода намуда, қиматашро ҳангоми $m=-2$ ва $n=4$ будан, ҳисоб кунед.

165. Графики функсияи $y=9-2x$ -ро сохта, боварӣ ҳосил намоед, ки нуқтаҳои $A(0; 9)$, $B(-1; 11)$, $C(1; 7)$ ва $D(3; 3)$ ба график тааллуқ доранд.

166. Масофаи байни ду шаҳр ба 100 км баробар аст. Нозири роҳ автобуси мусофиркашии аз рӯйи ин маршрут ҳаракаткунанда-ро баъди $\frac{3}{5}$ ҳиссаи роҳро тай карданааш боздошт. То воҳӯрӣ бо нозир автобус чанд километр роҳро тай намуда буд?

167. Формулаи периметр ва масоҳати росткунҷаро ёбед, агар дарозии он нисбат ба бараш ду маротиба зиёдтар бошад.

168. Чуфт ё токии функсияро муайян кунед:

а) $y=x^2-7$; б) $y=-0.3x^3$; в) $y=-3$.

169. Нобаробарии $\frac{2x-1}{x-3} \geq 0$ -ро бо ёрии методи фосилаҳо ҳал намоед.

170. Сайёҳ 24 км роҳи ҳамвор ва 16 км роҳи душворгузари кӯҳро таи намула, барои тамоми роҳ 8 соат вақт сарф кард. Суръати аввалии ҳаракати сайёҳро ёбед, агар дар роҳи кӯҳӣ ӯ суръаташро 2 км/соат суст карда бошад.

13. Ҳалли муодилаҳои якномаълум

А) Муодилаи дараҷаи як. Ин гуна муодилаҳоро ба намуди $ax+b=0$ месоваранд, ки дар он x -тағйирёбанда, a ва b ададҳо ва $a \neq 0$ аст. Аз муодилаи болоӣ номаълуми x дар шакли $x = -\frac{b}{a}$ ёфта мешавад, ки он (яъне адади $-\frac{b}{a}$) решаи ягонаи муодилаи $ax+b=0$ -ро ташкил медиҳад. Умуман, ҳар як муодилаи дараҷаи якум дорони як реша аст, агар $a \neq 0$ бошад.

Б) Муодилаи дараҷаи ду. Оғро баъди табдилот ба намуди $ax^2+bx+c=0$ овардан мумкин аст, ки дар он x -тағйирёбанда, $a \neq 0$, b ва c ададҳои ҳақиқатӣ, шумора ва намуди решаҳои ин муодила ба аломати дискриминант $D=b^2-4ac$ вобастагӣ дорад. Ин вобастагиро дар шакли қадвали зайл ифода кардан мумкин аст:

$D=b^2-4ac$	$ax^2+bx+c=0$	Формулаи решаҳо
$D>0$	Ду решаи ҳақиқии x_1 ва x_2 дорад	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
$D=0$	Як реша дорад	$x = -\frac{b}{a}$
$D<0$	Реша надорад	—

Агар ду тарафи муодилаи $ax^2+bx+c=0$ -ро ба a тақсим кунему $\frac{b}{a}$ -ро бо p ва $\frac{c}{a}$ -ро бо q ишорат намоем, он гоҳ муодилаи $x^2+px+q=0$ ҳосил мешавад, ки онро муодилаи **кватратии ислоҳшуда** меноманд.

Дискриминанти он $D^1 = \frac{p^2}{4} - q$ аст. Ҷадвали вобастагии решаҳо аз аломати дискриминант барои ин муодила чунин аст:

$D^1 = \frac{p^2}{4} - q$	$x^2 + px + q = 0$	Формулаи решаҳо
$D^1 > 0$	Ду решаи гуногуни хақиқии x_1 ва x_2 дорад	$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D^1}$
$D^1 = 0$	як решаи ҳақиқӣ дорад	$x = -\frac{p}{2}$
$D^1 < 0$	решаи ҳақиқӣ надорад	—

Хотиррасон мекунем, ки сумма ва ҳосили зарби решаҳои муодилаи квадратии ислоҳшуда вобастагӣҳои $x_1 + x_2 = -p$ ва $x_1 \cdot x_2 = q$ -ро қаноат менамоянд. Ин вобастагӣҳоро **формулаи Виет** ва теоремаасро, ки онҳоро муқаррар менамояд, **теоремаи Виет*** меноманд.

Ниҳоят, ба назарияи умумии муодилаҳои дараҷаи ду баргашта, ҳолатҳои имконпазирро ба ҳисоб гирифта, ҳуҷса қардан мумкин аст, ки муодилаи дараҷаи дуёми дилхоҳ аз дуто зиёд реша надорад.

В) Муодилаи умумии дараҷаи n -умро ба намуди

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

овардан мумкин аст, ки дар он $a_n \neq 0$, $a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ ададҳои маълум ва x -тағйирёбанда мебошанд. Масалан, муодилаҳои умумии дараҷаи се ва чор, мувофиқан, дар шаклҳои зерин навишта мешаванд:

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_3 \neq 0)$$

$$a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_4 \neq 0).$$

Нишон додан мумкин аст, ки ҳар гуна муодилаи дараҷаи сеюм аз сето зиёд, чорум аз чорто зиёд ва n -ум аз n -то зиёд реша дошта наметавонад.

Барои муодилаҳои дараҷаи сеюму чорум формулаҳои хеле мураккаби ёфтани решаҳо маълуманд. Барои муодилаҳои умумии дараҷаашон аз чор боло бошад, формулаҳои умумии ёфтани решаҳо то ҳол номаълуманд, вале ин ҳаргиз мазмуни онро надорад, ки чунин муодилаҳоро ҳал қардан мумкин нест. Бо ёрии усулҳои махсус (ба монанди гузориш, ба зарбкунандаҳо ҷудокунии бисёрраъзогӣ ва тарзи графикӣ) баъзан имконияти ҳалли чунин муодилаҳо мавҷуданд. Дар поён ин усулҳо дар ҳалли муодилаҳои мушаххас амалӣ карда шудаанд.

* Франсуа Виет (1540–1603) – математикаи фаронсавӣ

Мисоли 1. Муодилаи $x^4 - x^3 - 16x^2 + 16x = 0$ -ро ҳал мекунем. Қисми чапи ин муодиларо ба зарбкунандаҳо ҷудо карда

$$x \cdot (x^3 - x^2 - 16x + 16) = 0, \quad x \cdot (x-1)(x^2 - 16) = 0,$$

$$x \cdot [x^2 \cdot (x-1) - 16(x-1)] = 0, \quad x \cdot (x-1)(x-4)(x+4) = 0$$

-ро пайдо мекунем, ки аз он чор решаи $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$, $x_4 = -4$ ҳосил мешавад.

Мисоли 2. Муодилаи $x^5 - x \cdot (8x^3 + 1) + 8 = 0$ -ро ҳал мекунем. Ифодаи дар қисми чапи муодилабударо ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем:

$$\begin{aligned} x^5 - x \cdot (8x^3 + 1) + 8 &= x^5 - 8x^4 - x + 8 = x^4 \cdot (x-8) - (x-8) = \\ &= (x-8)(x^4 - 1) = (x-8)(x-1)(x+1)(x^2 + 1). \end{aligned}$$

Инак, муодила ба муодилаи

$(x-1)(x+1)(x-8)(x^2+1) = 0$ баробарқувва аст. Охири дорой се решаи $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ ва $x_3 = 8$ мебошад, ки онҳо аз муодилаҳои $x-1=0$, $x+1=0$ ва $x-8=0$ ҳосил мешаванд.

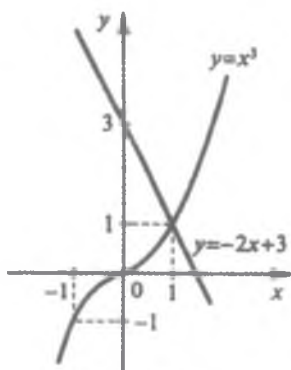
Мисоли 3. Муодилаи $x^3 + 2x - 3 = 0$ -ро ба тарзи графикӣ ҳал мекунем.

Бо ин мақсад муодилаи додашударо дар шакли $x^3 = -2x + 3$ ме-нависем. Графикҳои функсияҳои $y = x^3$ ва $y = -2x + 3$ -ро дар як системаи координатавӣ месозем (расми 60). Чунон ки аз графикҳо дида мешавад, онҳо якдигарро фақат дар як нуқта мебуранд.

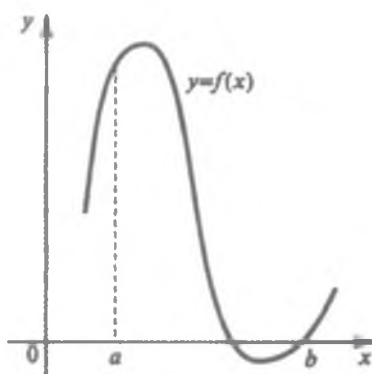
Абсиссаи нуқтаи буриш ба 1 баробар аст, ки он решаи муодилаи $x^3 + 2x - 3 = 0$ мебошад.

Аслан ҳангоми истифодаи тарзи графикӣ ҳал решаи матлубро асосан тақрибӣ ёфтани мумкин аст. Аз ин рӯ, масъалаи бо саҳеҳии додашуда ёфтани реша ба миён меояд. Барои бо ин тарз саҳеҳтар ёфтани қимати тақрибии реша аввал порчаеро, ки дар он решаи матлуб воқеъ аст, ёфта, баъд аз он зерпорчае, ки решаро доро мебошад, ҷудо мекунам. Пас аз чанд маротиба такрор кардани ин амал мо зерпорчаеро ҳосил мекунем, ки дарозияш ба қадри зарурӣ хурд буда, решаи матлуб дар он воқеъ аст. Агар нуқтаи дилхоҳи ин зерпорча ба сифати қимати тақрибии ин ҳал гирифта шавад, он гоҳ хатои содиркардаамон аз дарозии зерпорча зиёд намешавад.

Графикҳои функсияи $y = f(x)$, ки $f(x)$ -бисёрраъзогӣ аст, дар ҳамвории координатавӣ хати қатъи яклухтро ифода мекунад. Агар функсияи номбурда дар нӯғҳои порчаи охириноки $[a; b]$ қиматҳои аломатшон гуногунро қабул кунад (яъне, хати қатъ аз як нимҳамвории бо тире Ox ҷудошуда ба нимҳамвории дигараш гузарад, пас он тире абсиссаро ақаллан дар як нуқта мебурад), он гоҳ решаи муодилаи $f(x) = 0$ нуқтаи дохилии порчаи $[a; b]$ мебошад (ниг. ба расми 61).



Расми 60



Расми 61

Ҳамин тариқ, агар $f(x) \cdot f(b) < 0$ бошад, он гоҳ муодилаи $f(x) = 0$ дар порчаи $[a; b]$ реша дорад.

Барои тасдиқи гуфтаҳои боло муодилаи $x^5 + x^2 - 5x + 2 = 0$ -ро мегирем. Маълум аст, ки яке аз решаҳои муодила ба порчаи $[1; 2]$ тааллуқ дорад, чунки қимати функсияи $f(x) = x^5 + x^2 - 5x + 2$ дар нӯғҳои он $f(1) = -1 < 0$ ва $f(2) = 28 > 0$ мешавад. Порчаи $[1; 2]$ -ро бо ёрии нуқтаҳои 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2,0 ба 10 ҳиссаи баробар тақсим карда, дар онҳо қиматҳои функсияро пай дар пай, то даме ҳисоб мекунем, ки порчаи дарозияш 0,1-ро ёбему дар нӯғ-ҳояш функсия қиматҳои аломаташон гуногун қабул кунад. Ин порча порчаи $[1,2; 1,31]$ аст, чунки $f(1,2) = -0,8 < 0$, $f(1,3) = 0,87 > 0$.

Ҳамин тариқ, дар қадами дуюми амалиёт ба хулоса меоем, ки решаи муодила ба порчаи $[1,2; 1,3]$ тааллуқ дорад. Бо мақсади саҳеҳтар ҳисоб кардани решаи муодила порчаи охиринро ба 10 қисми баробар (бо саҳеҳии 0,01) аз рӯи нуқтаҳои 1,20; 1,21; 1,22; 1,23; 1,24; 1,25; 1,26; 1,27; 1,28; 1,29; 1,30 тақсим карда, мебинем, ки $f(1,21) = -0,1 < 0$ ва $f(1,22) = 0,08 > 0$ мешавад. Ин қиматҳоро ба инобат гирифта, ба хулосаи зерин меоем: **решаи муодила дар байни ададҳои 1,21 ва 1,22 ҷойгир аст.** Ададҳои 1,21 ё 1,22-ро ба сифати қимати тақрибии решаи саҳеҳиаш то 0,01 гирифтани мумкин аст. Бо ҳамин тарз қимати тақрибии решаи муодиларо то саҳеҳии 0,001, 0,0001 ва ҳақазо ҳисоб кардан мумкин аст.

Ниҳоят, қайд мекунем, ки аз рӯи решаҳои маълум ҳуди муодиларо барқарор кардан мумкин аст (барои муодилаи квадратӣ ин гуна барқароркуниро дар синфи 8 омӯхта будем). Масалан, агар $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$ бошад, он гоҳ ифодаи $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$ қисми чапи муодилаи матлуби $f(x) = 0$ -ро ташкил медиҳад. Дар муодилаи $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = 0$ қавсҳоро кушода, ҳосил мекунем:

$$x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 = 0.$$



1. Дар бораи муодилаҳои бутуни якномаълума чӣ гуна маълумот доред? 2. Дискриминанти муодилаи квадратӣ гуфта, чиро дар назар доранд? Вобаста ба D муодила чанд реша доштаниш мумкин аст? 3. Муодилаи якномаълуми дараҷаи сеюм, чорум ва n -ум чанд реша дошта метавонад? 4. Муодилаҳои бутунро ($f(x)=0$, $f(x)$ -бисёрраъзогии тартиби n , $n \geq 3$) баъзан бо кадом тарзҳо ҳал кардан мумкин аст? 5. Оё аз рӯйи решаҳои маълум ҳуди муодилаи бутуни $f(x)=0$ -ро тартиб додан мумкин аст? Мисолҳо оред.

171. Муодилаи зеринро ҳал кунед:

а) $2x+3=0$;

г) $(x-1)(x-5)=2(x-1)$;

б) $\frac{x}{4} + \frac{3x}{8} = 5$;

д) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$;

в) $2.1y^2 = 0$;

е) $x(x+3)+a(a-3)=2(ax-1)$;

г) $\frac{2-y}{3} + \frac{1+3y}{6} = 1\frac{1}{6}$

ж) $(1+ax) \cdot x = (1-x)a^2 + a + 1$

172. Муодиларо ҳал кунед:

а) $2x \cdot (8x-13) - (4x-1)^2 = 35$;

в) $\frac{y^3}{2} = 0.5(y^2+y)(y-3) + y + 5$;

б) $(18x-1)(1+18x)-8=0$;

г) $4x^2 \cdot (x^2-1) - (4x^4-1) = -3$.

173. Муодиларо ҳал кунед:

а) $\left(1 - \frac{x}{6}\right)(x+6) - x = 6 + \frac{x(x-11)}{6}$;

г) $2 \cdot (x+1)^2 + 3(x-5) = (1-x)(1+x) + 96$;

б) $36x^2 - 84x + 73 = (12x-11)(3x+1)$;

г) $x \cdot (x^2 - 2x + 1) + x(3-x) = 7 \cdot (1-x) + 2$;

в) $5(2-3x) + 39 = 11(3-x)$

д) $(x^3-1)^2 = x^6-15$

174. Барои кадом киматҳои бутуни b решаи муодилаи:

а) $bx+24=0$;

б) $-\frac{bx}{3} + 7 = 0$ адади бутун мешавад?

175. Барои кадом киматҳои p решаи муодилаи:

а) $3x+p=-13$ адади манфӣ;

б) $4x=4p-2.5$ адади мусбат аст?

176. Исбот кунед, ки муодилаи $9x^6+6x^4+x^2+12=0$ реша надорад.

177. Решаҳои муодиларо бо ёрии ба зарбкунандаҳо ҷудокунии ёбед:

а) $4x^3-8x^2-x+2=0$; б) $3x^4-10x^3+12x^2-6x+1=0$.

178. Барои кадом киматҳои m муодила ду реша дорад:

а) $3x^2-12x+3m=0$;

г) $x^2+5x+6m=0$

б) $3x^2-8x+m+6=0$;

д) $x^2+3x+0.5m=0$;

в) $9x^2-3x+m=0$;

е) $4x^2-x-m=0$;

г) $x^2+mx+4=0$;

ё) $mx^2+6x-5=0$.

179. Барои кадом қиматҳои k муодила як реша дорад:
 а) $4x^2-3x+2k=0$; г) $x^2+2(k-4)x+k^2+6k=0$;
 б) $kx^2-x+1=0$; д) $(2+k)x^2+4kx+4k+1=0$;
 в) $x^2-kx+20=0$; е) $x^2+2(k-4)x+k^2-4k+3=0$;
 г) $4x^2+kx+4=0$; ё) $(k-2)x^2+(k-5)x-5=0$.
180. Барои кадом қиматҳои t муодила реша надорад:
 а) $3x^2-5tx+12=0$; г) $6x^2+tx+36=0$; с) $8x^2-32x+2t=0$
 б) $16x^2-tx+9=0$; г) $x^2-2tx+1=0$; ё) $x^2-12x+3t=0$
 в) $x^2-0.5tx+9=0$; д) $3x^2-x-t=0$
181. Муодиларо ҳал кунед:
 а) $6x^4-216x^2=0$; г) $x^4-3x^3+3x^2-3x+2=0$;
 б) $x^5+0.6x^3=0$; д) $x^3-2x^2-2x-3=0$;
 в) $-2x^4=6x^2-7x^3$; е) $x^4+x^3-24x^2-25x-25=0$;
 г) $10x^4-x^2-3x^3=0$; ё) $x^4+6x^3-x-6=0$.
182. Решаҳои муодилаи зеринро ёбед:
 а) $7x^5-10x^4=0$; с) $x^4=x^3+2x^2$;
 б) $x^4-144x^3=0$; ё) $2t^5-8t^3=0$;
 в) $x^3-x^2=4x(x-1)$; ж) $3x^2-x^3+4x=0$;
 г) $(x-2)(x^2+6x)=24-12x$; з) $3t^4-81t=0$;
 г) $x^3+2x^2+3x+6=0$; и) $y^3-144y=0$;
 д) $x^4+x^3+3x^2+2x+2=0$; к) $x^3-0.01x=0$.
183. Аз рӯи решаҳои долашуда муодиларо тартиб диҳед:
 а) $x_1=1, x_2=2, x_3=3$; в) $x_1=1, x_2=-1, x_3=3, x_4=0$;
 б) $x_1=-1, x_2=2, x_3=3$; г) $x_1=1, x_2=-2, x_3=3, x_4=4$.
184. Муодилаи $x^3+2x-5=0$ -ро бо тарзи графикӣ бо саҳеҳии то 0.01 ҳал кунед.

Машқҳо барои тақрор

185. Решаҳои муодилаи $2x^2+5x-3=0$ -ро наёфта, қимати ифодаҳои
 а) $x_1+x_2+x_1x_2$; б) $x_1^2+x_2^2$ ва в) $x_1^3+x_2^3$ -ро ҳисоб кунед.
186. Калонтарин тақсимкунандаи умумии ададҳои 126, 540 ва 630-ро ёбед.
187. Исбот кунед, ки қимати ифодаи 25^7+5^{13} ба 30 тақсим мешавад.
188. Қимати касрхоро ёбед:
 а) $\frac{38^2-17^2}{72^2-16^2}$; б) $\frac{39,5^2-3,5^2}{57,5^2-14,5^2}$; в) $\frac{856^2-44^2}{406}$.
189. Ифодаи зеринро ба нишонаи қимати мутлақ нависед:
 а) $3|x+2|$; б) $|x+2|-x$; в) $|x^2-x|$.
190. Тарафҳои секунҷаи периметраш ба 30 см баробар, мувофиқан, ба ададҳои 5,7 ва 8 мутаносибанд. Тарафхоро ёбед.
191. Амонатбонк ҳар сол пулҳои гузаштаи мизочонро ду фоиз зиёд мекунад. Агар миқдори пули гузаштаи яке аз мизочон 15000 сомонӣ бошад, он гоҳ он баъди ду сол чӣ қадар мешавад?

192. Тракторчӣ мебоист дар муддати муайяни вақт 80 га заминро шудгор мекард. Ҷ ҳар рӯз аз нақша ду га зиёдтар заминро шудгор намуда, супоришро ду рӯз пеш аз мӯҳлат иҷро кард. Тракторчӣ супоришро дар чанд рӯз иҷро намудааст?

193. Графики функцияи

а) $y=2x^2-x+1$; б) $y=-9x^2$

сохта шавад.

194. Нобаробарии зеринро ҳал кунед:

а) $\frac{x}{6} - \frac{x}{7} \leq 1$; б) $\frac{x-4}{(x-1)(x-2)} > 0$.

14. Муодилаҳое, ки ба муодилаи квадратӣ оварда мешаванд

Муодилаи

$$[p \cdot f(x) + q] - [m \cdot f(x) + n] = s \quad (1)$$

-ро дида мебароем, ки дар он p , q , m , n ва s ададҳои ҳақиқӣ ва $p \neq 0$, $m \neq 0$ мебошанд. Инчунин, фарз мекунем, ки $f(x)$ - бисёрраъзогии дараҷаи ду аст. Агар барои ҳалли муодила амалиёстро аз кушодани қавсҳо сар кунем, он гоҳ ҳатман ба муодилаи тартиби 4 меоем, ки аксаран ҳаллаш ба мушқилиҳо меорад. Бо тағйирёбандаи нави y иваз намудани $f(x)$ бошад, ёфтани ҳалли (1)-ро хеле осон мегардонад, чунки муодила нисбати $y = f(x)$ ба муодилаи квадратии намунаш $(py + q)(my + n) = s$ мубаддал мегардад.

Инро дар ҳалли мисоли мушаххаси

$$(x^2 - 3x + 4)(x^2 - 3x + 6) = 8 \quad (2)$$

муоина мекунем. Дар ин ҷо ба ҷойи $f(x)$ ифодаи $x^2 - 3x$ омадааст. Агар ҳамаи аъзои муодиларо ба қисми чап гузаронида, ифодаи ҳосилшударо ба бисёрраъзогии намунаш стандартӣ табдил додан хоҳем, он гоҳ муодилаи

$$x^4 - 6x^3 + 19x^2 - 30x + 16 = 0 \quad (2')$$

-ро ҳосил мекунем, ки ҳаллаш хеле душвор аст. Вале гузориши $y = x^2 - 3x$ * муодилаи (2)-ро ба $(y+4)(y+6) = 8$ ва баъди содакунӣ ба $y^2 + 10y + 16 = 0$ меорад.

Муодилаи квадратии ҳосилшударо ҳал мекунем:

$$y_{1,2} = \frac{-10}{2} \pm \sqrt{5^2 - 16} = -5 \pm \sqrt{25 - 16} = -5 \pm \sqrt{9} = -5 \pm 3; \quad y_1 = -2; \quad y_2 = -8.$$

Қимати ёфтаамонро дар баробарии $y = x^2 - 3x$ гузошта, муодилаҳои $x^2 - 3x + 2 = 0$ ва $x^2 - 3x + 8 = 0$ -ро ҳосил мекунем. Муодилаи $x^2 - 3x + 8 = 0$ реша надорад, чунки $D = -23 < 0$ аст. Муодилаи $x^2 - 3x + 2 = 0$ бошад, ду решаи гуногуни $x_1 = 1$ ва $x_2 = 2$ дорад.

* Гузориши $x^2 - 3x + 4 = y$ низ татбиқшаванда аст.

Аз ин ҷо ба ҳулоса меоем, ки муодилаи (2) ҳам ду реша доштааст $x=1$, $x=2$

Муодилаи (1) бо осонӣ ба шакли

$$a \cdot [f(x)]^2 + b \cdot f(x) + c = 0 \quad (3)$$

оварда мешавад ($a=mp$, $b=np+qm$, $c=nq-s$), ки он нисбати $f(x)$ муодилаи квадратӣ мебошад. Масалан аст, агар $f(x)=x^2-x$, $a=1$, $b=-3$ ва $c=2$ бошад, он гоҳ муодилаи

$$(x^2-x)^2-3(x^2-x)+2=0 \quad (4)$$

-ро ҳосил мекунем. Маълум аст, ки (4) нисбати x^2-x муодилаи квадратӣ аст ва гузориши $x^2-x=y$ онро ба муодилаи $y^2-3y+2=0$ меорад. Решаҳои ин муодила $y_1=1$ ва $y_2=2$ мебошанд. Ба тағйирёбандаи аввала баргашта, муодилаҳои $x^2-x=1$ ва $x^2-x=2$ -ро ҳал мекунем. Онҳо,

мувофиқан, дорои решаҳои $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ва $x_1=2$, $x_2=-1$ хастанд. Аз ин ҷо ҳосил мекунем, ки муодилаи (4) чор реша дорад:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad x_3=2, \quad x_4=-1.$$

Э з о х. Агар дар муодилаи (3) $f(x)=x^2$ бошад, он гоҳ муодилаи дараҷаи чоруми намудаи $ax^4+bx^2+c=0$ ҳосил мешавад. Ин намуд муодилаҳо, ки нисбат ба x^2 муодилаи квадратиянд ва мо онҳоро дар синфи 8 муоина карда будем, муодилаи биквадратӣ номида мешаванд. Масалан, муодилаи

$$7x^4-9x^2+2=0 \quad (5)$$

муодилаи биквадратӣ мебошад. Онро ҳал мекунем. Барои ин x^2 -ро бо y ишорат карда, муодилаи квадратии $7y^2-9y+2=0$ -ро ҳосил мекунем, ки $y_1=1$ ва $y_2=\frac{2}{7}$ решаҳоиаш мебошанд. Аз муодилаҳои $x^2=1$ ва

$x^2=\frac{2}{7}$ мувофиқан $x_1=1$, $x_2=-1$ ва $x_3 = \sqrt{\frac{2}{7}}$; $x_4 = -\sqrt{\frac{2}{7}}$; -ро меёбем, ки

онҳо муодилаи (5)-ро қаноат менамоянд. Баъзан, бо ёрии ба зарбкунандаҳо ҷудокунии ифодаҳои қисми чап муодилаҳои намуди (2') ё (5)-ро ба муодилаҳои хаттӣю квадратӣ овардан мумкин аст. Масалан, қисми чапи муодилаи

$$3x^4-8x^2+5=0,$$

-ро ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем:

$$3x^4 - 8x^2 + 5 = 3 \left(x^4 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{5}{3} \right) = 3 \left[\left(x^4 - 2 \cdot \frac{4}{3}x^2 + \frac{16}{9} \right) + \frac{5}{3} - \frac{16}{9} \right] =$$

$$= 3 \left[\left(x^2 - \frac{4}{3} \right)^2 - \frac{1}{9} \right] = 3 \left[\left(x^2 - \frac{4}{3} \right) - \frac{1}{3} \right] \left[\left(x^2 - \frac{4}{3} \right) + \frac{1}{3} \right] =$$

$$= 3 \left(x^2 - \frac{5}{3} \right) \left(x^2 - 1 \right) = 3(x-1)(x+1) \left(x^2 - \frac{5}{3} \right).$$

Муодилаи аввала ба муодилаҳои $3x^2-5=0$, $x \pm 1=0$ оварда шуд.

Инак, $x=\pm 1$ ва $x=\pm \sqrt{\frac{5}{3}}$ решаҳои муодилаанд.



1. Муодилаи (1)-ро навигшта онро шарҳ диҳед. Дар мисолҳои мушаххас нишон диҳед, ки онро ба муодилаи квадратӣ овардан мумкин аст. 2. Аз муодилаи (1) муодилаи (3)-ро ҳосил кунед. 3. Кадом намууди муодилаҳоро муодилаи биквадратӣ меноманд? Мисолҳо оред. 4. Тарзи ҳалли муодилаҳои биквадратиро схематикӣ баён кунед.

195. Тағйирёбандаи навро дохил намуда, муодилаи зеринро ҳал кунед:

- а) $(x^2-4x+1) \cdot (x^2-4x+8)+12=0$; д) $24x^2+25=(2x^2+3)^2$;
 б) $(x^2+2x)(x^2+2x-3)=-2$; е) $x \cdot (x-2)+1,5=0,5 \cdot (x^2-2x)^2$;
 в) $(x^2-8)^2+4(x^2-8)-5=0$; ё) $(x^2+x)^2+x(x+1)=42$;
 г) $(x^2+6x)^2+8(x^2+6x)-9=0$; ж) $(2x^2+x)^2-5x(2x+1)+6=0$;
 ғ) $(x^2+x)^2-5(x^2+x)-84=0$; з) $11x^2+5=(x^2+3)^2$.

196. Муодилаи биквадратиро ҳал кунед:

- а) $x^4-5x^2+6=0$; ж) $x^4-41x^2+400=0$;
 б) $y^4-3y^2+2=0$; з) $y^4+24y^2+148=0$;
 в) $x^4+8x^2+20=0$; и) $x^4-8x^2+16=0$;
 г) $2x^4-11x^2+12=0$; к) $t^4-10t^2+9=0$;
 д) $12y^4-25y^2+12=0$; л) $5y^4-15y^2+42=0$;
 е) $x^4-20x^2+64=0$; м) $x^4-4x^2+1=0$;
 ё) $x^4-13x^2+36=0$; н) $x^4-2x^2+1=0$.

197. Координатаҳои нуктаҳои буриши тире абсиссаро бо графики функция ёбед:

- а) $y=2x^4-9x^2+4$; г) $y=x^4-27x^2+50$; е) $y=x^4-11x^2+10$;
 б) $y=3x^4-7x^2+4$; ғ) $y=4x^4-9x^2+5$; ё) $y=3x^4+16x^2-19$;
 в) $y=4x^4-37x^2+9$; д) $y=7x^4+6x^2-13$.

198. Оё адади $-\sqrt{5}$ решаи муодилаи $t^4-10t^2+25=0$ шуда метавонад?

199. Адади 0,5 решаи муодилаи биквадратии $16x^4-8x^2+1=0$ мешавад ё не?

200. Барои кадом қиматҳои k муодила:

- а) $3x^4-4x^2+1\frac{1}{3}=0$; б) $kx^4-6x^2+9=0$ чор реша дорад?

201. Барои кадом қимати k муодила:

- а) $x^4-3kx^2+4=0$; б) $kx^4-5x^2-36=0$ ду реша дорад.

202. Барои кадом қимати k муодила:

- а) $5x^4+3x^2-4,5k=0$; б) $6x^4+kx^2+6=0$ реша надорад?

203. Муодиларо бо тарзи ба зарбкуниданҳо ҷудо кардан ҳал кунед.

а) $9x^4 - 7x^2 - 2 = 0$;

в) $16x^4 - 8x^2 + 1 = 0$;

б) $13x^4 - 10x^2 - 32 = 0$;

г) $7x^4 + 2x^2 - 9 = 0$.

204. Муодиларо ҳал кунед:

а) $(x^2 - 4)(x^2 + 4) - 2(x^2 - 11) = 0$;

в) $6x^5 + 6x^4 - x^3 - x^2 + 5x + 5 = 0$;

б) $2x^2 \cdot (x-1)(x+1) - 3x^2 - 12 = 0$;

г) $2x^5 - 2x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 3 = 0$.

Машиқҳо барои такрор

205. Нобаробарию ҳал кунед:

а) $|2x - 5| < 1$;

в) $|2 - x| < 4$;

г) $x^2 - 2x - 3 > 0$;

б) $|x - 4| \leq 3$;

г) $\frac{2-x}{(x-1)(x+3)} < 0$;

д) $9x^2 - 16 \leq 0$.

206. Ҳисоб кунед:

$$\frac{0,016:0,12+0,7}{1,2:0,375-0,2} \cdot \left(6\frac{4}{5}:15\frac{2}{5} + 0,8\right).$$

207. Иёбот кунед, ки барои ҳар гуна адади натуралӣ k қимати ифодаи $(3k+1)^2 - (3k-1)^2$ ба 12 тақсим мешавад.

208. Касрҳоро сода кунед:

а) $\frac{(x+2)^3}{x^2+4x+4}$;

б) $\frac{x^2-16}{3x-12}$;

в) $\frac{3-3x}{x^2-2x+1}$;

г) $\frac{x^3-8}{x^2+2x+4}$.

209. Фарқи квадратҳои ду адади пайдарпайи натуралӣ ба -11 баробар аст. Ададҳои ҷӯида.

210. Масофаи байни ду шаҳр 420 км аст. Ду автомобил, ки суръатҳои 10 км/соат фарқ мекунанд, аз як шаҳр баромада ба самти шаҳри дигар раванд. Автомобили якум назар ба автомобили дуюм 1 соат пештар омада расид. Суръати ҳар як автомобилро ёбед.

211. Оё ифодаҳои зерин бутунанд:

а) $\frac{3x^2+18}{3} + 7xy$;

б) $\frac{4x-8}{y} + \frac{y^{22}}{2}$.

§6. СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ ДУНОМАЉУМА

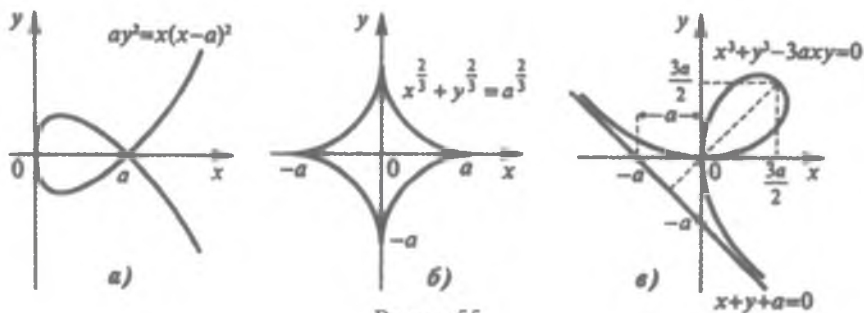
15. Муодилаи дуномаълума ва графики он

Ҳар гуна муодилаи дорой ду номаълумро дар шакли

$$F(x, y) = 0$$

навиштан мумкин аст. Масалан, барои муодилаи $y = ax^2 + bx + c$ $F(x, y) = ax^2 + bx + c - y$ ва барои муодилаи $x^2 + y^2 = 9$ $F(x, y) = x^2 + y^2 - 9$ мешавад.

Баробариҳои $ax + by = c$, $x \cdot y = 1$, $4x^3y + y^5 = 0$, $(x^2 + y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0$ низ муодилаҳои дуномаълумдор ҳастанд. Маҷмӯи нуқтаҳои ҳамвории координатавӣ, ки муодилаи дуномаълумро ба баробарии дуруст табдил медиҳад, **графики муодилаи дуномаълума** номида мешавад. Ин графикҳо гуногуншакланд. Дар ҳақиқат, графики



Расми 55

муодилаи $ax+bx=c$ - хати рост, графикаи $y=ax^2+bx+c$ -парабола (ниг. ба боби I), $x \cdot y=1$ -гипербола мебошанд. Дар расми 62 графика баъзе муодилаҳо акс ёфтаанд.

Усули муайян кардани дараҷаи муодилаи бутуни дуномаълума ба усули муайян кардани дараҷаи муодилаҳои якномаълума монанд аст. Бигузор, қисми чапи муодилаи дар боло номбурдаи дуномаълума бисёраъзогии намудаш стандартӣ ва тарафи росташ адади нул бошад. Дар ин ҳолат дараҷаи муодила ба дараҷаи ин бисёраъзогӣ баробар мешавад. Ҳамин тариқ, дараҷаи муодилаи дуномаълума гуфта, дараҷаи муодилаи ба он баробаркувваеро меноманд, ки қисми чапаш бисёраъзогии намудаш стандартӣ ва қисми росташ нул аст. Маълум аст, ки муодилаи $1+(x^3+y^3)^2=x^6-xy^2$ ба муодилаи $2x^3y+xy^2+y^2+1=0$ баробаркувва мебошад. Пас, муодилаи аввала муодилаи дараҷаи чор аст. Дараҷаи муодилаи $7x^8-12xy+y=7x^2(x^6+1)$ бошад ба ду баробар аст, чунки он ба муодилаи дараҷаи дуҷоми $-7x^2-12xy+y=0$ баробаркувва мебошад.

?

1. Якчанд мисоли муодилаҳои дуномаълумаро оред. 2. Графикаи муодилаи дуномаълума гуфта, чиरो меноманд? 3. Графикаи муодилаҳои $y = \frac{4}{x}$; $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$; $y=-2$ ва $y=3x^2-1$ дар ҳамвории координатавӣ кадом хатҳо мебошад? 4. Дар зери мафҳуми «дараҷаи муодилаи бутуни дуномаълума» чиरो мефаҳмед? Мафҳумро бо мисолҳо шарҳ диҳед.

212. Аз муодилаҳои зерин кадомаш муодилаҳои дуномаълумаанд:

- а) $x^2+y^3=3xy$; в) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$; г) $2x^2-y-1=0$;
 б) $xyz+1=0$; г) $x \cdot y-3=0$; д) $x^y+z=1$!

213. Оё чуфти ададҳои (1;-2) муодиларо қаноат менамояд:

- а) $x^2-y^3-8=0$; в) $x^2+y=5$;
 б) $xy+2y=-6$; г) $x^2-y^2+xy+6=0$?

214. Графики муодилаи дуномаълумаро созед:

- а) $3x+y=4$; в) $x^2-5x+4-y=0$; г) $y^2=2ax(a>0)$;
 б) $-2x+9y=4$; г) $xy-9=0$; д) $y-2x^3=0$.

215. Дараҷаи муодилаи бутуни дуномаълумаро муайян кунед:

- а) $9x-4y-102=0$; е) $3(x^2+y^2)^3=xy^2$;
 б) $3x-4y+13=0$; ё) $(x+y^6)^2=y^{12}+x^3y$;
 в) $x \cdot (1-y)-4y=0$; ж) $3xy^2=(x^4+y^3)^3$;
 г) $3x^2+y^2+8x=0$; з) $(x+y)^3=x^3+y^3$;
 ф) $(x^2-2y^2)^2+5y=9$; и) $x^3+y^3=2x^2y^2$;
 д) $5x^5-6x^4y^2+x^3y^2=0$; к) $8x^8-17xy+3y=8x^2(x^6+1)$.

Маишқҳо барои тақрир

216. Қимати ифодаро ёбед:

$$\frac{\left[4-3,5 \cdot \left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{2}\right)\right] \cdot \left(41\frac{28}{84}-40\frac{49}{60}\right)}{0,16 \cdot \left(3\frac{2}{7}-\frac{3}{14} \cdot \frac{1}{4}\right)}$$

217. Номаялумро аз таносуби $0,3x:3\frac{1}{3}=6:1,5$ ёбед.

218. Ба зарбкунандаҳо чудо кунед:

- а) $(x+3)^2-16$; в) $6x^2+24xy+24y^2$;
 б) $4a^2-x^2+2xy-y^2$; г) x^6-2^6 .

219. Агар 3%-и пули дар муомилот гузошташуда 15 000 000 сомони-ро ташкил диҳад, пас тамоми маблағ чанд сомони-ро ташкил медиҳад?

220. Масъалае тартиб диҳед, ки бо ёрии системаи муодилаҳои хаттии $x+y=6$ ва $x-y=2$ ҳал шавад.

221. Нобаробариҳои зеринро ҳал кунед:

- а) $\frac{x^2-3x}{2x+1} < 0$; б) $3x^2-x-2 \geq 0$.

222. Муодилаи

$$\frac{200}{x} - \frac{200}{x+2} = 5$$

ро ҳал кунед.

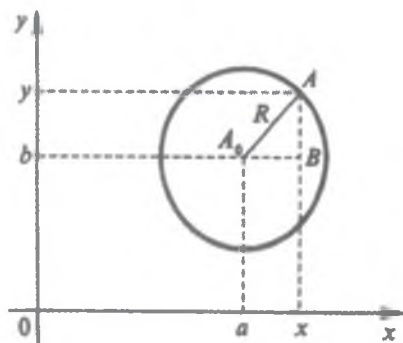
223. Барои кадом киматҳои аргументи функсияи $f(x)$ ба нул мубаддал мегардад, киматҳои мусбат ва манфӣ қабул мекунад, агар:

- а) $f(x)=-3x+9$; б) $f(x)=5x+20$
 бошад?

16. Муодилаи давра

Аз курси геометрия (синфи 7) мафҳуми давра ба мо маълум аст. Дар асоси он маълумот давраи чойи геометрии чунин нуктаҳоеро ($A(x, y)$) дар ҳамворӣ ифода мекунад, ки онҳо аз ягон нуктаи ба қайд гирифташудаи ҳамворӣ ($A_0(a, b)$) дар як ҳел масофаи чойгиранд.

Нуктаи $A_0(a, b)$ маркази давра ва масофаи A_0A -ро радиуси (R)



Расми 63

давра меноманд. Нишон медиҳем, ки муодилаи дуномаълумас вучуд дорад, ки давра графики он мебошад.

Фарз мекунем, ки давраи марказаш нуктаи $A_0(a; b)$ -и ҳамворӣ ва радиусаш ба R баробар дода шудааст. Барои тартиб додани муодилаи ин давра аз формулаи масофаи байни ду нуктаи ҳамворӣ ва теоремаи Пифагор истифода мекунем.

Бигузор $A(x; y)$ нуктаи дилхоҳи давра ва $A_0(a; b)$ маркази он бошад. Азбаски $A_0A=R$, $A_0B=x-a$ ва $AB=y-b$ аст (ниг. ба расми 63), пас квадрати масофа аз нуктаи A то нуктаи A_0 ба $(A_0B)^2+(AB)^2$ баробар мешавад. Аз ин ҷо формулаи матлуби давраро дар шакли

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad (1)$$

ҳосил мекунем. Координатаҳои (x, y) -и ҳар як нуктаи A -и давра муодилаи (1)-ро қаноат менамояд ва баръакс ҳар як нуктаи дилхоҳи A -и ҳамворӣ, ки координатаҳояш муодилаи (1)-ро қаноат мекунад, ба давра тааллуқ дорад (чунки масофа аз он то нуктаи A_0 ба R баробар аст.)

Ҳангоми $A_0(0; 0)$ будан (яъне агар маркази давра дар ибтидои системаи координатаҳо воқеъ бошад) муодилаи давра намуди

$$x^2+y^2=R^2 \quad (2)$$

-ро мегирад.

Масалан, ба осонӣ боварӣ ҳосил намудан мумкин аст, ки муодилаи дуномаълумай $(x-1)^2+(y+4)^2=9$ муодилаи давраест, ки марказаш дар нуктаи $(1; -4)$ буда, радиусаш ба 3 баробар аст.

Мувофиқан муодилаи $x^2+y^2+2x=0$ низ муодилаи давра мешавад. Дар ҳақиқат, бо ёрии табдилдиҳиҳои $0=x^2+y^2+2x=(x^2+2x)+y^2=(x^2+2x+1)+y^2-1$ онро ба намуди $(x+1)^2+(y-0)^2=1$ оварда, бо (1) муқоиса карда, ҳосил мекунем, ки он муодилаи давраи радиусаш 1 ва марказаш дар нуктаи $(-1; 0)$ ҷойгирбуда мебошад.



1. Формулаи масофаи байни ду нуктаи ҳамвории координатавино нависед. 2. Теоремаи Пифагорро баён кунед. 3. Давра чист? 4. Муодилаи давраи радиусаш R ва марказаш дар нуктаи $A_0(a; b)$ бударо нависед. Агар маркази давра дар нуктаи $(0; 0)$ ҷой гирифта бошад, он гоҳ муодилааш чӣ гуна мешавад? 5. Оё муодилаҳои (1) ва (2)-ро муодилаҳои дуномаълума номидан мумкин аст?

224. Аз рӯйи муодилаи додашуда координатаҳои маркази давра ва радиуси онро муайян кунед:

а) $(x-2)^2+(y-5)^2=4$; г) $\left(x-1\frac{7}{9}\right)^2+\left(y-\frac{25}{4}\right)^2=169$;

б) $(x+3)^2+(y-1)^2=l$; д) $(x-9)^2+(y-16)^2=69\frac{4}{9}$;

в) $(x-11)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}$; е) $(x+1.44)^2+(y+0.2)^2=0.09$;

г) $(x+5)^2+(y-1.1)^2=1.21$; ё) $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{9}\right)^2=\frac{1}{144}$.

225. Муодилаи дуномаълума, ки муодилаи давра мебошад, ба намуди (1) ё (2) оварда, барояш координатаҳои нуктаи марказ ва бузургии радиусро ёбед:

а) $x^2+y^2-3x=0$; г) $x^2+y^2-2x+2y=0$; е) $x^2+y^2=2x-8y+8$;

б) $x^2+y^2+4y=0$; г) $x^2+y^2+x+4y=0$; ё) $x^2+y^2=6x+4y+3$.

в) $x^2+y^2-x=0$; д) $x^2+y^2-4x+y=\frac{1}{4}$

226. Аз рӯйи координатаҳои додашудаи нуктаи $A_0(a; b)$ ва радиуси давра R муодилаашро тартиб дода, графикашро созед:

а) $A_0(0; 0)$, $R=3$; в) $A_0(-3; 5)$, $R=2$; г) $A_0(5; -2)$, $R=4$;

б) $A_0(2; 3)$, $R=11$; г) $A_0(-2; -4)$, $R=1$; д) $A_0(0; -1)$, $R=5$.

227. Координатаҳои марказ $A_0(a; b)$ ва бузургии радиус R -ро аз муодилаи давра ёфта, дар ҷавоб $a+b+R$ -ро нависед:

а) $x^2+y^2=16$; г) $x^2+y^2-4x+4y=17$;

б) $x^2+y^2-6x=7$; г) $x^2+y^2+4x-4y=1$;

в) $x^2+y^2-2x+8y-8=0$; д) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=9$

228. Аз нуктаҳои (1; 3), (4; 3), (-3; 2), (7; 1) кадомаш ба давраи муодилааш $x^2+y^2=25$ буда тааллуқ дорад?

229. Графики функсияи $x^2+y^2-2x=0$ -ро сохта, нуктаҳои:

а) абсиссааш $x=1$; б) ординатааш $y=0$ -ро ёбед.

230. Оё графики а) $x^2+y^2+4x+1=0$ тири Oy -ро; б) $x^2+y^2-6y+4=0$ тири Ox -ро мебурад?

Машқҳо барои такрор

231. Қимати ифодаи $5a^2b^3+4(a-b)$ -ро ҳангоми $a=-0.5$ ва $b=-1$ будан, ҳисоб кунед.

232. Ададиро ёбед, ки а) 40% ба 12; б) 1,25% ба 55; в) 0,8% ба 184 баробар бошад.

233. Сода кунед:

а) $\frac{a^2}{ax-x^2} + \frac{x}{x-a}$;

б) $\frac{x^2-4xy}{2y^2-xy} - \frac{4y}{x-2y}$;

234. Системаи муодилаҳои хаттии зеринро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} 2x - 3y = 21. \\ 2y = -10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + y = 14, \\ y - x = 10; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -x + 2y = -7, \\ 5x - y = -28. \end{cases}$

235. Маҳрачи каср аз сураташ 4 воҳид зиёдтар аст. Агар ба он касри чаппаашро ҳамчун кунем, он гоҳ $2\frac{16}{21}$ ҳосил мекунем. Касрро ёбед.

236. Масофаи байни стансияҳои Душанбе ва Турсунзода 96 км аст. Як қатора назар ба дигараш ин масофаро 40 дақиқа пештар тай намуд. Суръати ҳаракати қатораи якум назар ба дуюм 12 км/соат зиёдтар аст. Суръати ҳаракати қаторакоро ёбед.

237. $f(x) = -7x + 8$. Қимати x -ро ёбед, ки дар он

а) $f(x) = -6$; б) $f(x) = 15$; в) $f(x) = 0$ бошад.

238. Нишон диҳед, ки функсияи $f(x) = -2x^3$ дар тамоми нуқтаҳои тири ададӣ камшаванда аст.

17. Тарзи графикӣ ҳалли системаи муодилаҳо

Пеш аз баёни мақсади асосӣ баъзе маълумоти ёрирасонро нисбати системаҳои ду муодилаи хаттии дуномаълума,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

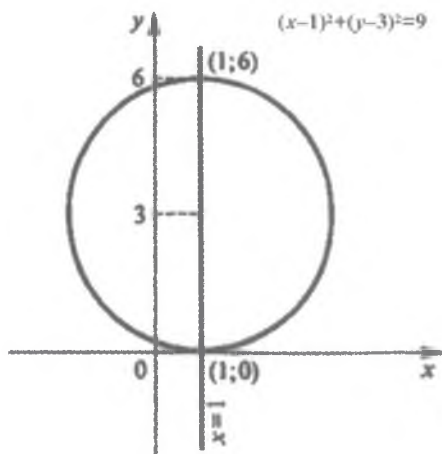
ки дар синфи 7-ум омӯхта будем, ба хотир меорем. Ҳалли чунин система гуфта, ҷуфти қиматҳои $(x; y)$ -ро меноманд, ки ҳар як муодилаи системаро қаноат менамояд. Ҳал кардани системаи муодилаҳо ин ёфтани ҳамаи ҳалҳои система мебошад. Системаро ҳамчун меноманд, агар ақалан як реша дошта бошад ва ғайриҳамчун меноманд, агар ягонто ҳал надошта бошад (ба ибораи дигар, ҳалҳои система маҷмӯи холиро ташкил медиҳад). Системаи муодилаҳои ҳалҳояшон якхеларо системаҳои баробарқувва меноманд.

Қайд мекунем, ки системаи муодилаҳои хаттиро дар синфи 7 бо тарзҳои гузориш, ҳамкунии алгебравӣ ва графикӣ ҳал карда будем. Дар ин параграф бо системаҳои иборат аз ду муодилаи дараҷаи дуюм ё системаҳои аз як муодилаи дараҷаи якум ва як муодилаи дараҷаи дуюм ташкилёфта машғул шуда, онҳоро бо тарзи графикӣ ҳал мекунем.

Мисоли 1. Системаи

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 = 9, \\ x-1 = 0 \end{cases}$$

-ро дида мебароем. Маълум аст, ки графики муодилаи $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 9$ давраи марказаш нуқтаи $(1; 3)$ ва радиусаш ба 3 баробарбуда аст. Графики муодилаи $x-1=0$ хати ростест, ки он аз нуқтаи $x=1$ -и тири абсисса гузашта, ба тири ордината параллел мебошад. Онҳоро дар як ҳамвории координатавӣ месозем (расми 64, а).



Расми 55

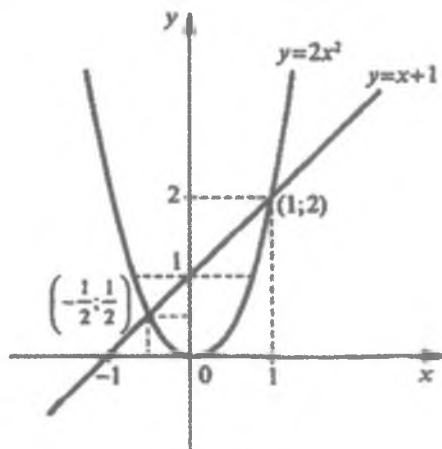
Аз графикҳо намоён аст, ки онҳо ду нуқтаи умумии $(1; 0)$ ва $(1; 6)$ доранд, яъне қиматҳои $x_1=1, y_1=0$ ва $x_2=1, y_2=6$ муодилаҳои системаро ба баробариҳои дуруст табдил дода (яъне онҳоро қаноат менамояд), ҳалли системаро ташкил медиҳанд.

Мисоли 2. Бо тарзи графикӣ системаи

$$\begin{cases} 2x^2 - y = 0 \\ y - x - 1 = 0 \end{cases}$$

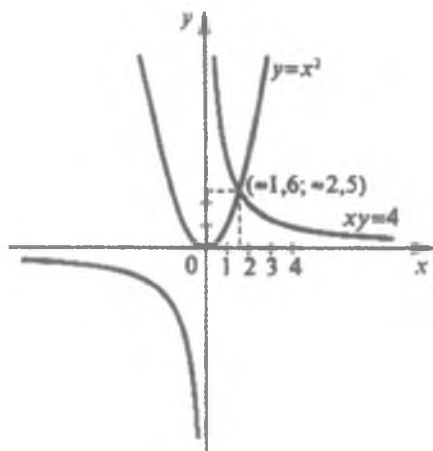
-ро ҳал мекунем. Дар ҳамвории координатавӣ графики функсияи $y=2x^2$ (параболаи қуллаҳояш дар нуқтаи $(0; 0)$ ҷойгиршуда) ва функсияи $y=x+1$ (хати рости тирҳои системаи координатаҳоро дар нуқтаҳои $(-1; 0)$ ва $(0; 1)$ буранда)-ро месозем (расми 64,б).

Координатаҳои нуқтаи дилхоҳи параболаи сохташуда ҳалли муодилаи $y-2x^2=0$ ва координатаҳои нуқтаи дилхоҳи хати рост ҳалли муодилаи $y-x-1=0$ -ро ташкил медиҳанд. Азбаски координатаҳои нуқтаҳои $(1; 2)$ ва $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ ки буриши параболаю хати рост мебошанд, муодилаҳои системаро қаноат менамоянд, пас онҳо ҳалли система мешаванд.



Расми 64,б

Ҷ а в о б: $x=1; y=2;$
 $x_2 = -\frac{1}{2}, y_2 = \frac{1}{2}$



Расми 64,е

Мисоли 3. Ниҳоят системаи

$$\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ xy - 4 = 0, (x \neq 0) \end{cases}$$

-ро дида мебароем.

Бо мақсади ёфтани ҳалли система дар як ҳамвории координатавӣ графики функцияҳои $y = x^2$ (парабола) ва $y = \frac{4}{x}$ (гипербола)-ро месозем (ниг. ба расми 64, в).

Нуқтаи буриши ин ду хати қач ҳалли ягонаи система мебошад. Аз расм намоён

аст, ки $x \approx 1,6$ ва $y \approx 2,5$ мешавад. Ба ибораи дигар, ҳалли тақрибии система ро ташкил медиҳад.



1. Системаи муодилаҳои хаттии дуномаълумаро бо кадом тарз ҳал меkunанд? 2. Дар кадом ҳолат система ҳамчун номида мешавад? 3. Чӣ гуна системаҳоро баробаркува меноманд? 4. Аз нуқтаи назари геометрии маънидод кунед: системаи ду муодилаи хаттӣ: а) ҳалли ягона дорад; б) ҳалли бешумор дорад; в) ҳал надорад.

239. Системаи муодилаҳоро бо тарзи графикӣ ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x + y = 6, \\ x \cdot y = 8; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x - 2 = 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 41; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + y^2 = 11, \\ 2x - y = 7; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ y = x^2 - 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = x^2, \\ 2x - y + 5 = 0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x \cdot y = -12, \\ x - y = 7; \end{cases}$

и) $\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9, \\ y - x^2 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y - x^2 = 3, \\ x + y = 5; \end{cases}$

ё) $\begin{cases} x + y = -8, \\ x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0; \end{cases}$

к) $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = 2 \cdot |x|. \end{cases}$

240. Ду ҳал доштани системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 9, \\ y = x^2 - 6; \end{cases}$$

-ро бо тарзи графикӣ нишон диҳед.

Машиқҳо барои такрор

241. Қимати ифодаи a^2-3x+6 -ро хангоми $a = -\frac{1}{3}$ будан, ҳисоб кунед.
242. Оё таносуби зерин дуруст аст:
 $3,75 : 10,4 = 3\frac{11}{13} : 10\frac{2}{3}$
243. Нишон диҳед, ки барои ҳар гуна адади натуралии k ифодаи $\frac{(8^{k+1}+8^k)^2}{4^k-4^{k-1}}$ ба 192 тақсим мешавад.
244. Мукоиса кунед: а) 45^2-31^2 ва 44^2-30^2 -ро; б) $297 \cdot 299$ ва 298^2 -ро; в) 26^3-24^3 ва $(26-24)^3$ -ро; г) $(17+13)^3$ ва 17^3+13^3 -ро.
245. Системаи муодилаҳои зеринро бо тарзи чамъкунии алгебравӣ ё гузориш ҳал кунед:
 а) $\begin{cases} 2x + 7y = 9, \\ y - 2x = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + y = 7, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x - 2y = 6, \\ x - y = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + 4y = 21, \\ 2x - y = 6. \end{cases}$
246. Қайқ мебоист 34 км-ро дар муддати муайяни вақт шино мекард. Вале баъди 3 соати ҳаракат онро дар яке аз бандарҳои дохилӣ ба муддати 40 дақиқа боздоштанд. Барои он ки қайқ дар вақти муайяншуда ба ҷойи зарурӣ расад, суръати ҳаракаташро 2 км/соат зиёд намуд. Суръати аввалии ҳаракати қайқро ёбед.
247. Нишон диҳед, ки функсияи $y=0,1x^3+1$ дар тамоми тири ададӣ афзуншаванда аст.
248. Экстремали функсияи квадратино ёбед:
 а) $y=3x^2-7$ б) $y=x^2-4x$; в) $y=-3x^2+18x-11$.
249. Муодилаи биквадратино ҳал кунед:
 а) $x^4-7x^2+6=0$; б) $3x^4-5x^2+2=0$;
250. Оё графики $2x^2+y^2+9x+9=0$ тири Oy -ро мебурад?

18. Ҳалли системаи муодилаҳои дараҷаи дуум

Ба монанди пункти гузашта дар ин ҷо ҳам бо системаҳои: а) аз як муодилаи дараҷаи дуум ва як муодилаи дараҷаи якуми дуномаълума; б) аз ду муодилаи дараҷаи дууми дуномаълума таркибёфта машғул мешавем.

Ҳалли системаҳои намуди а)-ро бо тарзи гузориш ҳал мекунам, ки он аз зинаҳои зерин иборат аст:

– аз муодилаи дараҷаи якуми система яке аз номаълумҳоро ба воситаи дигараш ифода мекунам (чунон ки хангоми ёфтани ҳалли системаҳои ҳатгӣ дар синфи 7 амал карда будем);

– қисми рости ҳосилшударо ба муодилаи дигари система (ба муодилаи дараҷаи дуум) гузошта, муодилаи якномаълумаро ҳосил мекунам:

–муодилаи дараҷаи дуҷоми ҳосилкардамонро ҳал мекунем;
 –решаҳои ҳосилкардаро ба муодилаи табдилёфтаи дараҷаи якум гузошта, қимати мувофиқи тағйирёбандаи дуҷомиро меёбем.

Қайд менамоем, ки бо ин тарз системаҳои намуди а)-ро ҳамеша ҳал кардан мумкин аст.

Мисоли 1. Системаи

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 = 4, \\ y - x = -2; \end{cases}$$

-ро ҳал мекунем.

Мувофиқи гуфтаҳои боло амал карда, муодилаи дуҷоми системаро дар шакли ба аввала баробаркувваи $y=x-2$ менависем. Ин қимати y -ро ба муодилаи якум гузошта, баъди иҷрои табдилоти лозимӣ муодилаи якномаълуми $2x^2-2x=0$ -ро ҳосил мекунем. Решаҳои ин муодила $x_1=0$ ва $x_2=1$ мебошад. Қиматҳои ёфтаи x_1 ва x_2 -амонро алоҳида-алоҳида ба $y=x-2$ гузошта, $y_1=-2$ ва $y_2=-1$ -ро пайдо мекунем.

Ҷавоб: $(0; -2)$, $(1; -1)$.

Мисоли 2. Системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} x^2 + y = 14, \\ y - x = 8; \end{cases}$$

-ро ҳал мекунем.

Бо ин мақсад аз муодилаи дуҷоми система y -ро ба воситаи x ифода намуда, (яъне $y=8+x$), қиматашро ба муодилаи якум мегузорем. Дар натиҷа, нисбат ба x муодилаи квадратии $x^2+x-6=0$ -ро ҳосил мекунем, ки он решаҳои $x_1=2$ ва $x_2=-3$ дорад. Қиматҳои 2 ва -3 -ро дар $y=x+8$ гузошта, мувофиқан, $y_1=10$ ва $y_2=5$ ҳосил мекунем.

Ҷавоб: $(2; 10)$, $(-3; 5)$.

Акнун фарз мекунем, ки системаҳои намуди б) дода шуда бошанд. Гарчанде ёфтани ҳалли чунин системаи ду муодилаи дараҷаи дуҷоми дуномаълума мушқил бошад ҳам, вале дар баъзе мавридҳо онҳоро бо ёрии тарзҳои гузориш, ҷамъкунии алгебравӣ ва дигар тарзҳои сунъӣ ҳал кардан мумкин аст.

Мисоли 3. Системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ 3x + y^2 = 10; \end{cases}$$

-ро ҳал мекунем.

Муодилаҳои системаро аъзо ба аъзо ҷамъ карда, муодилаи квадратии $x^2+3x-18=0$ -ро ҳосил мекунем, ки решаҳои $x_1=3$ ва $x_2=-6$ аст. Қимати $x_1=3$ -ро ба муодилаи $3x+y^2=10$ гузошта, $y^2=1$ ва аз он $y=\pm 1$ -ро ҳосил мекунем. Гузориши қимати $x_2=-6$ бошад, ба муодилаи $y^2=28$ меорад, ки аз он $y=\pm 2\sqrt{7}$ -ро пайдо мекунем.

Инак, система чор ҳал дорад: $(3; 1)$, $(3; -1)$, $(-6; 2\sqrt{7})$, $(-6; 2\sqrt{7})$.

Мисоли 4. Системаи

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3, \\ xy = 1; \end{cases}$$

-ро ҳал мекунем.

Аз муодилаи дуюм дида мешавад, ки $y = \frac{1}{x}$ аст. Дар муодилаи якум ба ҷойи y ифодаи $\frac{1}{x}$ гузошта, муодилаи биквадратии $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ -ро ҳосил мекунем (ниг. ба п. 14, §5), ки ба решаҳои $x = \pm\sqrt{2}$ ва $x = \pm 1$ соҳиб аст. Ин ададхоро пай дар пай ба формулаи $y = \frac{1}{x}$ гузошта, қиматҳои мувофиқи y -ро дар намуди $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ ва $y = \pm 1$ меёбем. Хамин тариқ, чор ҳал доштани системаи мазкурро муқаррар кардем: $(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\sqrt{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(1; 1)$, $(-1; -1)$.

Мисоли 5. Ҳалли системаи

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 24, \\ x - y = 4 \end{cases}$$

-ро меёбем.

Онро бо тарзи гузориш ҳал кардан мумкин аст. Вале намуди муодилаи якуми система имконият медиҳад, ки тарзи сунъиро пеш гирем. Муодилаи якумро ба шакли $(x-y)(x+y) = 24$ оварда, аз он дар асоси муодилаи дуюм $x+y=6$ ҳосил мекунем. Дар натиҷа, системаи муодилаҳои хаттии

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 4 \end{cases}$$

-и ба аввала баробарқувваро ҳосил мекунем. Ин системаи хаттиро бо тарзи ҷамъкунии алгебравӣ ҳал карда, $x=5$, $y=1$ ҳосил мекунем.

Ҷавоб: $(5; 1)$.



1. Намудҳои системаҳои муодилаҳои дуномаълумаро номбар кунед. 2. Знаҳои тарзи гузориши ҳалро баён кунед. 3. Боз қадом тарзҳои ҳалли системаи муодилаҳои дараҷаи дуҷуми дуномаълумаро медонед?

251. Системаи муодилаҳоро бо тарзи гузориш ҳал кунед:

а) $\begin{cases} y^2 - 2x = -6, \\ x - y = 3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y^2 - 3x = 45, \\ x + y = 3; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = a^2 - 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y^2 + 2x = 33, \\ x - y = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y = -a, \\ xy = -2a^2; \end{cases}$

ё) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 6, \\ 3y - x = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + 2y = 24, \\ y - 2x = 6; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 - 2y = 19, \\ 4x + y = 7; \end{cases}$

252. Тарзи гузоришро истифода бурда, системаи муодилаҳоро ҳал кунед.

$$\begin{array}{lll}
 \text{а)} \begin{cases} x^2 = 2y + 26, \\ 2y - 3x + 8 = 0; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} y \cdot (2x + 1) = 8,4, \\ x + 5y = 9; \end{cases} & \text{ж)} \begin{cases} x \cdot (y - 1) = 6, \\ x = 3y; \end{cases} \\
 \text{б)} \begin{cases} x \cdot (1 + y) = -4, \\ x + y = 2; \end{cases} & \text{д)} \begin{cases} x^2 - 2y = 0, \\ 2y = x + 6; \end{cases} & \text{з)} \begin{cases} (5x - y) \cdot y = -6,25, \\ y = 5x + 2,5; \end{cases} \\
 \text{в)} \begin{cases} y^2 + x + 1 = 0, \\ x - y + 1 = 0; \end{cases} & \text{е)} \begin{cases} x^2 = y^2 + 6, \\ 7y + 5x = 0; \end{cases} & \text{и)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ y + 6 = 0; \end{cases} \\
 \text{г)} \begin{cases} 7x - y = 4, \\ y + xy = 6; \end{cases} & \text{ё)} \begin{cases} 2(y - x) - 14 = y, \\ y + xy = -16; \end{cases} & \text{к)} \begin{cases} 2x^2 + xy = 10, \\ -x + 2 = 0. \end{cases}
 \end{array}$$

253. Системаи муодилаҳоро бо тарзи ҷамъкунии алгебравӣ ҳал кунед:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а)} \begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} x^2 - y^2 = 9, \\ y - x^2 = 0; \end{cases} \\
 \text{в)} \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 228, \\ 3x^2 - 2y^2 = 172; \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ -y^2 + x = -5. \end{cases}
 \end{array}$$

254. Системаи муодилаҳоро бо истифодаи тарзи ҷамъкунии алгебравӣ ҳал кунед:

$$\begin{array}{lll}
 \text{а)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x^2 - y^2 = 14; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} 2x - 3xy + 4y = 0, \\ x + 3xy - 3y = 1; \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} 3x + xy = -18, \\ y - xy = 30; \end{cases} \\
 \text{в)} \begin{cases} xy + x = 56, \\ y - xy = -42; \end{cases} & \text{д)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x^2 - y^2 = 8; \end{cases} & \text{ж)} \begin{cases} x^2 + 3x - 4y = 20, \\ -x^2 + 2x - y = 5. \end{cases}
 \end{array}$$

255. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{array}{lll}
 \text{а)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 8,5, \\ x + y + 1 = 0; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} xy = -8, \\ x + y^2 = 0; \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} (x - 1)(y + 10) = 9, \\ x + y = -3; \end{cases} \\
 \text{в)} \begin{cases} x^2 - y = 5, \\ x^2 \cdot y = 36; \end{cases} & \text{д)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 25; \\ x^2 + y = 13; \end{cases} & \text{ж)} \begin{cases} 2x - y = 1, \\ 2x^2 - y^2 + x + y = -11. \end{cases} \\
 \text{г)} \begin{cases} x + y^2 = 11, \\ x \cdot y^2 = 18; \end{cases} & \text{ж)} \begin{cases} (x - 2)(y + 3) = 160, \\ x + y = -27; \end{cases} &
 \end{array}$$

256. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{array}{lll}
 \text{а)} \begin{cases} x + \frac{y}{3} = 1, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{5}{6}; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} 3x - y = -3, \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = -5\frac{1}{2}; \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3}, \\ x^2 - y^2 = 8; \end{cases} \\
 \text{в)} \begin{cases} 2x + y = 8, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4}; \end{cases} & \text{д)} \begin{cases} x - 4y = -2, \\ \frac{1}{y} + \frac{3}{x} = 1; \end{cases} & \text{ж)} \begin{cases} \frac{2x}{y} + \frac{x}{2y} = 5, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}
 \end{array}$$

257. Системаи муодилаҳои зеринро бо тарзи графикӣ ва гузориш (ва ё ҷамъкунии алгебравӣ) ҳал кунед:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} x+y=10, \\ y=x^2-10; \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} y-x^2-1=0, \\ x+2y=5; \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} x^2+y^2=16, \\ (x-2)^2+y^2=36; \end{cases} \\ \text{б)} \begin{cases} x^2+y^2=16, \\ 2x+y=8; \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} x^2+y^2=36, \\ y=x^2+6; \end{cases} & \text{д)} \begin{cases} xy=9, \\ y=x. \end{cases} \end{array}$$

258. Параболаи $y=2x^2-5x+3$ ва хати рости $2x+y+9=0$ -ро насохта, собит кунед, ки онҳо яқдигарро намебуранд.

259. Исбот кунед, ки хати рости $y-x=\frac{3}{4}$ бо параболаи $y=x^2-2x+3$ як нуқтаи умумӣ дорад ва координатаҳои онро ёбед:

260. Графикҳоро насохта, нуқтаҳои буриши хатҳои зеринро ёбед.

- а) давраи $x^2+y^2=25$ ва гиперболаи $xy=12$;
 б) гиперболаи $xy=16$ ва хати рости $x+y=10$;
 в) давраҳои $x^2+y^2=2$ ва $(x-2)^2+(y-2)^2=2$.

Машқҳо барои тақрор

261. Қимати тағйирёбандаро, ки барояш ифода маъно надорад, ёбед:

$$\text{а)} \frac{7x+11}{2x}; \quad \text{б)} \frac{3}{3x+5}; \quad \text{в)} \frac{x}{2x-4,8}; \quad \text{г)} \frac{x+1}{2,3x-2}.$$

262. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

$$\text{а)} y = \frac{x+2}{x \cdot (x+1)}; \quad \text{б)} y = \frac{2}{2x^2+3}; \quad \text{в)} y = \sqrt{x+3};$$

263. Ҳисоб кунед:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \left[\left(152\frac{3}{4} - 148\frac{3}{8} \right) \cdot 3 \right] : 0,2; & \text{б)} \left(172\frac{5}{6} - 170\frac{1}{3} + 3\frac{5}{12} \right) : (0,8 \cdot 0,25); \\ \text{в)} \left(6,6 - 3\frac{3}{14} \right) 5\frac{5}{6} : [(21 - 1,25) : 2,5] \end{array}$$

264. Сода кунед:

$$\text{а)} \frac{x}{2a^2-ax} - \frac{4a}{2ax-x^2}; \quad \text{б)} \frac{12-y}{6y-36} + \frac{6}{6y-y^2}$$

265. Барои кадом қиматҳои x :

- а) сеаъзогии квадратии $2x^2-3x+1$ қимати манфӣ;
 б) касри $\frac{2+x}{x-3}$ қимати мусбат қабул мекунад?

266. Хушмаҳмад дар нимаи дуёми рӯз, баъди аз нисфирӯзӣ гузаштани $2\frac{1}{6}$ соат, барои машқкунӣ ба махфили варзишӣ рафт.

У соати чанд ба машқкунӣ рафтааст?

267. Масъалае тартиб диҳед, ки ба ҳалли муодилаи

$$\frac{x}{x+3} - \frac{x-1}{x-3} = \frac{9}{10} \text{ оварда расонад.}$$

268. Экстремум ва экстремали функцияро ёбед:

а) $y=3(x-7)^2-4$;

б) $y=-2(x-5)^2+6$.

269. График насохта, нишон диҳед, ки графики функцияи $x^2+2y^2-9y+4=0$ тири Ox -ро намебурад.

19. Системаи муодилаҳои якҷинса ва симметрия

А) Системаи якҷинса. Аввал мафҳуми функцияи якҷинсаро шарҳ медиҳем. Барои осонии кор бисёрраъзогии $f(x, y)=ax^2+bxy+cy^2$ -ро мегирем. Дараҷаи ҳар як аъзои ин бисёрраъзогӣ ба ду баробар аст. Пас, агар x ва y -ро ба ягон адади t зарб занем, он гоҳ $a(xt)^2+b(xt \cdot yt)+c(yt)^2=t^2 \cdot (ax^2+bxy+cy^2)$, яъне $f(xt; yt)=t^2 f(x, y)$ мешавад. Функцияҳоеро, ки дорой чунин хосиятанд, **функцияҳои якҷинса** меноманд. Масалан, $f(x, y)=x^2+\frac{2}{3}xy+5y^2$, $F(x, y)=x^2+xy+y^2, \dots$ функцияҳои якҷинсаанд. Вале функцияҳои $f(x, y)=2x^2+3xy^2+4$, $F(x, y)=-2x^3+xy-y^2, \dots$ якҷинса нестанд.

Т а ъ р и ф и 1. Муодилаи дуномаълуми $f(x, y)=0$ -ро якҷинса меноманд, агар $f(x, y)$ бисёрраъзогии якҷинсаи тартиби ду бошад.

Нишон медиҳем, ки муодилаи якҷинсаи

$$ax^2+bxy+cy^2=0 \quad (1)$$

ба муодилаи квадратӣ оварда мешавад. Дар ҳақиқат, тарафи чапро дар шакли

$$ax^2+bxy+cy^2=y^2 \cdot \left(a \cdot \frac{x^2}{y^2} + b \cdot \frac{x}{y} + c \right), \quad y \neq 0$$

навишта,

$$a \left(\frac{x}{y} \right)^2 + b \cdot \left(\frac{x}{y} \right) + c = 0 \quad (2)$$

-ро ҳосил мекунем, ки он нисбат ба $t=\frac{x}{y}$ муодилаи квадратиро ташкил медиҳад. Вобаста ба аломати дискриминанти муодила (ниг. ба п. 13) ҳулосаҳои гуногуни мувофиқ баровардан мумкин аст. Масалан, ҳангоми $D>0$ будан, он ба ду муодилаи

$$\frac{x}{y} = A \quad \text{ва} \quad \frac{x}{y} = B$$

чудо мешавад.

Акнун, ба мақсади асосӣ мегузарем.

Т а ъ р и ф и 2. Системаи намуни

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases} \quad (3)$$

-ро, ки қисмҳои чапашон бисёрраъзогиҳои якҷинсаи тартиби дуанд, системаи якҷинса меноманд.

Системаҳои якҷинса бо ёрии табдилот ва дохил кардани тағйирёбандаи нав ба муодилаи квадратӣ оварда мешаванд.

Мисоли 1. Системаи

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy = 160, \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 8 \end{cases}$$

-ро ҳал мекунем.

Ду тарафи муодилаи дуюмро ба 20 зарб зада, аз муодилаи якум муодилаи ҳосилшударо тарҳ мекунем:

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 2xy = 160 \\ - \\ 20x^2 - 60xy - 40y^2 = 160 \\ \hline -17x^2 + 58xy + 40y^2 = 0 \end{array}$$

Дар натиҷа, системаи якҷинсаи

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy = 160 \\ 17x^2 - 58xy - 40y^2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

-ро ҳосил мекунем, ки ба системаи аввала баробарқувва аст. Муодилаи якҷинсаи $17x^2 - 58xy - 40y^2 = 0$ -ро дида мебароем. Агар $y=0$ бошад, он гоҳ аз ҳуди ҳамин муодила $x=0$ -ро пайдо мекунем. Аммо ҷуфти $(0; 0)$ муодилаи якуми системаро қаноат намекунонад. Пас, $y \neq 0$ аст. Аз ин ҷо, ҳарду қисми муодилаи $17x^2 - 58xy - 40y^2 = 0$ -ро ба y^2 тақсим карда, муодилаи ба он баробарқувваи $17 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 58 \cdot \left(\frac{x}{y}\right) - 40 = 0$ -ро ҳосил мекунем. Баъди гузориши $\frac{x}{y} = t$ муодилаи квадратии $17t^2 - 58t - 40 = 0$ -ро ҳосил мекунем. Онро ҳал карда, решаҳои $t_1 = 4$ ва $t_2 = -\frac{10}{17}$ -ро меёбем. Яъне муодилаи $17x^2 - 58xy - 40y^2 = 0$ ба муодилаҳои $\frac{x}{y} = 4$ ва $\frac{x}{y} = -\frac{10}{17}$ баробарқувва будааст. Аз ин ҷо, баробарқуввагии системаи (4) ба системаҳои

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 4, \\ 3x^2 - 2xy = 160 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{10}{17}, \\ 3x^2 - 2xy = 160 \end{cases}$$

оварда мерасонад.

Онҳоро дар шакли

$$\begin{cases} x = 4y, \\ 3x^2 - 2xy = 160 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x = -\frac{10}{17}y, \\ 3x^2 - 2xy = 160 \end{cases}$$

навишта, алоҳида-алоҳида ҳал кардан мумкин аст. Дар асоси муодилаҳои якум муодилаҳои дуҷуми системаҳоро мувофиқан

ба намудҳои содаи $y^2=4$ ва $y^2=\frac{289}{4}$ овардан мумкин аст. Азбаски системаҳои

$$\begin{cases} x = \pm 8, \\ y = \pm 2 \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} x = \mp 5, \\ y = \pm \frac{17}{2} \end{cases}$$

ба системаи аввала баробарқувваанд, пас ҳалли система (8; 2),

$(-8; -2)$; $(-5; \frac{17}{2})$ ва $(5; -\frac{17}{2})$; мешавад.

Мисоли 2. Системаи

$$\begin{cases} 3x^2 + xy - 2y^2 = 0, \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = -1 \end{cases}$$

-ро ҳал мекунем.

Муодилаи якуми система муодилаи якчинса аст, чунки тарафи чапи он нисбат ба x , y бисёрраъзгии якчинсаи тартиби ду мебошад. Ба монанди мисоли 1 дар ин ҷо ҳам $y=0$ гирифта, аз муодилаи $3x^2+xy-2y^2=0$ $x=0$ -ро ҳосил мекунем. Ҷуфти $(0; 0)$ бошад, муодилаи дуюми системаро қаноат намекунонад. Бинобар ин, ду тарафи муодилаи якчинсаро ба $y^2(y \neq 0)$ тақсим карда (ин амалиёт ба гумшавии реша намеорад),

$$3 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 2 = 0$$

ҳосил мекунем. Онро ҳал карда, ду системаи

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = -1, \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = -1 \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{3}, \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = -1 \end{cases}$$

-ро пайдо мекунем, ки ба системаи аввала баробарқувва аст.

Онҳоро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} x = -y, \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y, \\ 2y^2 + 3y^2 + y^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y, \\ 6y^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y, \\ y^2 = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Яъне, система ҳал надорад;

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}y, \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}y, \\ \frac{8}{9}y^2 - 2y^2 + y^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}y, \\ y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2, \\ y^2 = \pm 3 \end{cases}$$

яъне система ду ҳалли намуди $(2; 3)$ ва $(-2; -3)$ -ро дорад.

Б) Системаи симметрий. Ифодаи аз ду тағйирёбандаи x ва y во-
баста симметрий номида мешавад, агар ивази x ба y ва y ба x қимати онро тағйир надиҳад. Масалан,

$$x^2 - 6xy + y^2; \frac{2}{\sqrt{x+y}}, (x+y) + 5xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \dots$$

ифодаҳои симметрианд.

Мувофиқан, бисёраъзогии аз ду тағйирёбанда вобастаи $P(x, y)$ симметрӣ номида мешавад, агар $P(x, y) = P(y, x)$ бошад. Бисёраъзогиҳои дутағйирёбандаи симметрии $x+y$ ва $x \cdot y$ асосӣ ҳисоб мешаванд, чунки дигар бисёраъзогиҳои симметрӣ ба воситаи онҳо ифода мешаванд. Дар ҳақиқат, агар $x+y=u$ ва $x \cdot y=v$ гузорем, он гоҳ

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x+y)^2 - 2xy = u^2 - 2v; \\ x^3 + y^3 &= (x+y)(x^2 - xy + y^2) = u(u^2 - v - 2v) = u \cdot (u^2 - 3v); \\ x^4 + y^4 &= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (u^2 - 2v)^2 - 2v^2 = \dots = u^4 - 4u^2v + 2v^2; \\ x^5 + y^5 &= (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x+y) = \\ &= (u^2 - 2v)(u^3 - 3uv) - uv^2 = u^5 - 5u^3v + 5uv^2; \\ x^2 + xy + y^2 &= (x^2 + 2xy + y^2) - xy = (x+y)^2 - xy = u^2 - v; \\ x^2 - xy + y^2 &= (x^2 + xy + y^2) - 2xy = u^2 - v - 2v = u^2 - 3v. \end{aligned} \quad (5)$$

Системаҳои, ки ҳамаи муодилаҳои бисёраъзогиҳои симметрианд, системаи симметрӣ номида мешаванд. Ин системаҳо бо ёрии гузориши $x+y=u$, $x \cdot y=v$ ва формулаҳои (5) ҳал карда мешаванд.

Мисоли 3. Системаи

$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91, \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$$

-ро ҳал мекунем.

Ин система симметрӣ буда, мувофиқи гузоришҳои $x+y=u$, $x \cdot y=v$ ва формулаҳои (5) ба намуди

$$\begin{cases} [(u^2 - 2v)^2 - 2v^2] + v^2 = 91, \\ (u^2 - 2v) - v = 7 \end{cases} \text{ ва ё } \begin{cases} (u^2 - 2v)^2 - v^2 = 91, \\ u^2 - 3v = 7 \end{cases}$$

оварда мешавад. Аз муодилаи охири $u^2 - 3v = 7$ дар шакли $u^2 = 3v + 7$ ифода карда, ба муодилаи якум мегузорем ва дар натиҷа

$$\begin{cases} 14v = 42, \\ u^2 = 3v + 7 \end{cases} \text{ ва ё } \begin{cases} v = 3, \\ u = \pm 4 \end{cases}$$

-ро пайдо мекунем.

Яъне система ду ҳал доштааст:

$$\begin{cases} u_1 = 4, & u_2 = -4, \\ v_1 = 3; & v_2 = 3 \end{cases}$$

Системаи аввала бошад, ба ду системаи зерин баробарқувва мешавад:

$$\begin{cases} x + y = 4, & x + y = -4, \\ x \cdot y = 3; & x \cdot y = 3. \end{cases}$$

Аз рӯйи теоремаи Виет ин ду система дорои ҳалҳои (1; 3), (3; 1) ва (-1; -3), (-3; -1) мебошанд.

Ҷ а в о б : (1; 3), (3; 1) (-1; -3), (-3; -1).

М и с о л и 4. Системаи

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 12, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

-ро ҳал мекунем.

Маълум аст, ки $x \neq 0$ ва $y \neq 0$ мебошад. Инро ба ҳисоб гирифта, системаро дар шакли

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 12xy, \\ 3(x + y) = xy \end{cases}$$

менависем, ки он симметрӣ аст. Табдилдихиро давом дода, системаи ба аввала баробаркувваи

$$\begin{cases} u^3 - 3uv = 12v, \\ 3u = v \end{cases} \text{ ва ё } \begin{cases} u \cdot (u^2 - 9u - 36) = 0, \\ v = 3u \end{cases}$$

-ро ҳосил мекунем.

Азбаски $x \neq 0$ ва $y \neq 0$ аст, пас $u \neq 0$ ва $v \neq 0$ мешавад. Аз ин ҷо

$$\begin{cases} u^2 - 9u - 36 = 0, \\ v = 3u \end{cases}$$

мешавад, ки аз он

$$\begin{cases} u_1 = 12, \\ v_1 = 36 \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} u_2 = -3, \\ v_2 = -9 \end{cases}$$

ҳосил мешавад. Системаҳои ба онҳо баробаркувваи

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ xy = 36; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -3, \\ xy = -9. \end{cases}$$

-ро навишта, ҳалли онҳоро меёбем. Дар айнаи ҳол ин ҳалҳои ҳалҳои системаи аввала ҳам мебошанд.

$$\text{Ҷ а в о б: } (6; 6), \left(\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}; \frac{-3-3\sqrt{5}}{2} \right), \left(\frac{-3-3\sqrt{5}}{2}; \frac{-3+3\sqrt{5}}{2} \right).$$



1. Муодилаи якҷинса гуфта, кадом муодиларо меноманд? Мисолҳо оред.
2. Намуди умумии системаи якҷинсаро нависед. Ин гуна системаҳо ро бо кадом тарзҳо ҳал кардан мумкин аст? 3. Кадом ифодаро симметрӣ меноманд? Мисолҳо оред. 4. Ҷй гуна система симметрӣ аст? Барои ҳалли системаҳои симметрӣ аз кадом гузориш ва формулаҳо истифода мебаранд?

70. Кадоме аз ифодаҳои зерин якҷинсаанд:

- а) $ax^2+26xy+3y^2$; г) $5xy-y+3$;
 б) $4x-3xy-y^2$; г) $4xy-2x^2y^2+3y^4$;
 в) $2x^3-xy^2+3y$; д) $x^3+y^3-3x^2y+3xy^2$?

71. Оё муодилаҳои зерин симметрианд?

- а) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 2xy = 0$; в) $\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x} = 1$; г) $x + \sqrt{x^2 + y^2} = 1 + xy$;
 б) $x^2 + y^2 + \frac{2}{xy} = 3$; г) $2(x^2 + y^2) + 3xy = 0$; д) $\frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{x}{y}$;

72. Системаи муодилаҳои якҷинсaro ҳал кунед:

- а) $\begin{cases} xy = 2, \\ 9x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^4 - y^4 = 15, \\ x^3y - xy^3 = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 6x^2 + xy - 2y^2 = 0, \\ 3x^2 - xy - 2y^2 = 0; \end{cases}$
 б) $\begin{cases} x^2(x+y) = 80, \\ 2x^2 - 3x^2y = 80; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = 136, \\ x^3y + xy^3 = 30; \end{cases}$

73. Системаи муодилаҳои симметриро ҳал кунед:

- а) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ (xy + 8)(x + y) = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^4 + y^4 = 97; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}, \\ x + y = 18; \end{cases}$
 б) $\begin{cases} xy(x+y) = 20, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{4}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 + xy, \\ x^3 + y^3 = 6xy - 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x^2y + xy^2 = 30; \end{cases}$

74. Системаҳоро ҳал кунед:

- а) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 1, \\ 3x^2 - 2xy + 3y^2 = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - 2xy = 1,25, \\ y^2 + 4xy + 1 = 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 540, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{12}; \end{cases}$
 б) $\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 20, \\ 5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 28, \\ x + xy + y = 14; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 26, \\ x + y = 0,75xy; \end{cases}$
 в) $\begin{cases} x^2 + xy = 36, \\ xy + y^2 = 45; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ x - xy + y = 7; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ xy - 48 = 0; \end{cases}$

Машқҳо барои тақрор

75. Касрро сода кунед:

$$\frac{a \cdot |a - 3|}{a^2 - a - 6}$$

76. Барои кадом қиматҳои x ифодаҳои

- а) $\sqrt{-a}$; б) $\sqrt{x+3}$; в) $\sqrt{(x-6)^2}$;

маъно доранд.

77. Қимати ифодаро ёбед:

- а) $\sqrt{13^2 - 12^2}$; в) $\sqrt{4,9 \cdot 360}$; д) $\sqrt{0,09} + \sqrt{0,16}$;
 б) $\sqrt{313^2 - 312^2}$; г) $\sqrt{160 \cdot 3,6}$; е) $\sqrt{0,01} - \sqrt{0,09}$;

278. Системаи муодилаҳои хаттии зеринро ҳал накарда, муайян кунед, ки кадоме аз онҳо ҳалли ягона дорад, ҳал надорад ва ё ҳалли бешумор дорад:

а) $\begin{cases} 2x + 7y = 16, \\ -x + y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + 4y = 11, \\ 2x + 8y = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - 11y = 3, \\ 4x - 44y = 12; \end{cases}$

279. Муодилаи $x^2 + 2y^2 - 24 = 0$ дода шудааст, ки дар он y аз x ду маротиба хурд аст. Ҷуфти ададҳои мусбати (x, y) -ро ёбед, ки онҳо муодиларо қаноат менамоянд.

280. Барои кадом қиматҳои x баробарии $\sqrt{(x-7)^2} = x-7$ ҷой дорад?

281. Маҳраҷи касри одии дуруст нисбат ба сураташ як воҳид қалонтар аст. Агар ба сурат 3 ва ба маҳраҷ 7-ро ҷамъ кунем, он гоҳ касре ҳосил мешавад, ки фарқаш аз касри аввала ба $\frac{1}{6}$ баробар аст. Касро ёбед.

282. Экстремуми функсияи $y = -3x^2 + 24x - 1$ -ро ёбед.

20. Ҳалли масъалаҳои матии бо ёрии системаи муодилаҳои дараҷаи дуум

М а с њ а л а и 1. Периметрии секунҷаи росткунҷа ба 84 см ва гипотенузааш ба 37 см баробар аст. Масоҳати онро ёбед.

Ҳ а л. Фарз мекунем, ки асоси секунҷаи росткунҷа x см ва баландиаш y см бошад (онҳо мувофиқан катетҳоро ифода мекунанд). Аз шарти масъала бармеояд, ки периметр ба 84 см баробар аст, бинобар ин, муодилаи $x + y + 37 = 84$ -ро ҳосил мекунем. Аз тарафи дигар, дар асоси теоремаи Пифагор $x^2 + y^2 = 37^2$ -ро навиштан мумкин аст. Аз ин ҷо, системаи

$$\begin{cases} x + y = 47, \\ x^2 + y^2 = 1369 \end{cases}$$

-ро ҳосил мекунем, ки ҳаллаш $x = 35$ ва $y = 12$ аст. Пас масоҳати матлуб

$$S = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 12 = 35 \cdot 6 = 210 \text{ см}^2, S = 210 \text{ см}^2$$

мешавад.

Ҷ а в о б: 210 см^2 .

М а с њ а л а и 2. Нисбати фарқи ду адад бар суммашон ба 3:8 ва бар ҳосили зарбашон ба 6:55 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.

Ҳ а л. Агар ададҳоро бо x ва y ишорат кунем, он гоҳ дар асоси шарти масъала муодилаҳои

$$\frac{x - y}{x + y} = \frac{3}{8} \quad \text{ва} \quad \frac{x - y}{xy} = \frac{6}{55}$$

ҳосил мекунем. Онҳоро чун системаи муодилаҳои дуномаълумай

$$\begin{cases} \frac{x-y}{x+y} = \frac{3}{8}, \\ \frac{x-y}{xy} = \frac{6}{55} \end{cases}$$

дида мебароем. Ин система ба системаи

$$\begin{cases} -5x + 11y = 0, \\ \frac{x-y}{xy} = \frac{6}{55} \end{cases}$$

баробаркувва аст. Аз муодилаи якум y -ро ба воситаи x дар шакли $y = \frac{5}{11}x$ ифода карда, қимати ёфтаамонро ба муодилаи дуюми система мегузorem ва барои ёфтани x муодилаи $\frac{6}{5x} = \frac{6}{55}$ ва аз он $x = 11$ -ро ҳосил мекунем. Қимати y -ро аз вобастагии $y = \frac{5}{11}x$ меёбем:

$y = 5$. Ҳамин тариқ, ададҳои матлуб 11 ва 5 буданд.

283. Ҳосили зарби ду адади бутун ба 30 ва суммашон ба 11 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.

284. Ҳосили зарби ду адади мусбат ба 10 ва фарқшон ба 3 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.

285. Нисбати ду адади бутун ба 3 ва фарқшон ба 8 баробар аст. Ададҳоро ёбед.

286. Фарқи квадратҳои ду адад ба 16 ва суммаи квадратҳояшон ба 34 баробар аст. Ададҳоро ёбед.

287. Агар ба адади якум адади дуюмро ду маротиба зиёд карда чамъ кунем, он гоҳ 10 ҳосил мешавад ва агар ба адади дуюм адади якумро ду маротиба зиёд карда чамъ кунем, он гоҳ 11 ҳосил мешавад. Ин ададҳоро ёбед.

288. Тарафҳои секунҷаи росткунҷа ёбед, агар масоҳати он ба 6 см^2 ва периметраш ба 12 см баробар бошад.

289. Гипотенузаи секунҷаи росткунҷа ба 13 см ва фарқи катетҳо ба 7 см баробар аст. Дарозии катетҳоро ёбед.

290. Майдони замини шакли росткунҷадоштаро, ки периметраш 44 м ва масоҳаташ 120 м^2 аст, панҷара гирифтанд. Дарозӣ ва бари майдонро ёбед.

291. Дарозии тарафҳои ду квадрат бо ададҳои 5 ва 4 мутаносибанд. Агар тарафҳои ҳар яке аз квадратҳоро 2 см кам кунем, он гоҳ фарқи масоҳати квадратҳои ҳосилшуда ба 28 см^2 баробар мешавад. Тарафҳои квадратҳои додашударо ёбед.

292. Як тарафи росткунҷа нисбат ба тарафи квадрат 3 см хурд буда, тарафи дигараш 2 маротиба зиёд аст. Агар масоҳати квадрат аз масоҳати росткунҷа 8 см^2 зиёд бошад, масоҳати квадрат чӣ қадар аст?

293. Дар ҳар як тарафи росткунча квадрат капида шудааст. Ҳосили ҷамъи масоҳати квадратҳо ба 82 см^2 ва масоҳати росткунча ба 20 см^2 баробар аст. Дарозӣ ва бари росткунчаро ёбед.
294. Дарозӣ ва бари росткунча ба ададҳои 3 ва 2 мутаносибанд. Агар дарозӣ ва бари росткунчаро яксантиметрӣ зиёд кунем, росткунчае ҳосил мешавад, ки масоҳаташ назар ба масоҳати росткунчаи аввала 26 см^2 зиёдтар аст. Дарозӣ, бар ва масоҳати росткунчаи авваларо ёбед.
295. Масоҳати росткунча ба 36 см^2 баробар аст. Агар дарозии онро 6 см ва барашро 1 см зиёд кунем, он гоҳ росткунчаи масоҳаташ 100 см^2 ҳосил мегардад. Бари росткунчаи ҳосилшударо ёбед.
296. Масоҳати секунчаи росткунча ба 6 см^2 ва гипотенузааш ба 5 см баробар аст. Дарозии катетҳоро ёбед.
297. Диагоналҳои параллелограмм, ки чун 2:3 нисбат доранд, ёфта шавад, агар тарафҳои ҷ, мувофиқан, ба 11 см ва 23 см баробар бошанд.
298. Диагоналҳои параллелограмм ба 17 см ва 19 см баробар буда, тарафҳои ҷ чун 2:3 нисбат доранд. Тарафҳоро ёбед.
299. Тарафҳои параллелограммро ёбед, агар фарқашон ба 4 см ва диагоналҳои ҷ ба 12 см ва 14 см баробар бошанд.
300. Сайёҳ дар 2 соат 3 км роҳи мумфарш ва 6 км роҳи ноҳамворро тай кард. Ў дар роҳи мумфарш назар ба роҳи ноҳамвор бо суръати 2 км/соат зиёд ҳаракат мекунад. Сайёҳ роҳи ноҳамворро бо кадом суръат тай намуд?
301. Завод дар муддати муқарраршуда мебоист 20 дастгоҳ тайёр мекард. Аммо завод плани яқрузаро ба як дастгоҳ зиёд иҷро карда, супоришро як рӯз пештар аз муҳлат иҷро намуд. Завод дар як рӯз чанд дастгоҳ тайёр кардааст?
302. Бори массааш 30 т мебоист ба воситаи автомобил дар якҷанд сафар кашонда мешуд. Аммо барои кашондани он автомобилҳои борбардориаш аз автомобилҳои пешниҳодшуда 2 т зиёдро фиристоданд, ва аз ин рӯ, миқдори сафарҳо (рафту омад) аз миқдори пешбинишуда 4-то кам шуд. Бор дар чанд сафар кашонда шуд.
303. Ду тракторчӣ дар як вақт ба кор сар карда, кореро дар $5\frac{1}{2}$ соат ба иҷро мерасонанд. Як тракторчӣ танҳо кор карда, ин корро назар ба дуюмаш 3 соат тезтар ба анҷом мерасонад. Агар ҳар як тракторчӣ танҳо кор кунад, ин корро дар чанд соат ба анҷом мерасонанд?
304. Ду бригадаи ҷинакчиён якҷоя кор карда, пахтаи майдонро дар 18 соату 45 дақиқа мегундоранд. Агар як бригада ҳосили майдонро нисбат ба дигараш 20 соат зудтар гундорад, он гоҳ бригадаҳо алоҳида-алоҳида кор карда, пахтаи майдонро дар муддати чанд вақт ҷида метавонанд?

305. Ду чисм аз қуллаи кунчи рост дар як вақт ба тарафҳои он ҳаракат карданд. Баъди 10 сонияи ҳаракат масофаи байни онҳо ба $\sqrt{34}$ см баробар шуд. Чисми якум дар 3 сония ҳамон қадар масофаро тай кард, ки онро чисми дуюм дар 5 сония тай мекунад. Ҳар як чисм бо кадом суръат ҳаракат кардааст?
306. Ду пиёдагард дар як вақт аз нуқтаҳои А ва В, ки масофаи байнашон 32 км аст, ба пешвози якдигар ба роҳ баромаданд. Баъди 2 соат барои дучор шудан боз 6 км роҳ ғаштан лозим шуд. Агар пиёдагарди якум аз нуқтаи А $\frac{8}{21}$ соат пештар ба роҳ мебаромад, онҳо дар нисфи роҳ дучор мешуданд. Суръати ҳаракати ҳар як пиёдагардро ёбед?

Машиқҳо барои такрор

307. Ифодаро сода кунед:

а) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}$.

308. Кадоме аз ададҳои зерин иррационалианд:

-2; 1; $\sqrt{12}$; $\sqrt{16}$; -1,5; $\sqrt{17}$; $0,7\sqrt{225}$?

309. Ҳисоб кунед:

а) $\frac{39^2 - 38^2}{11} \cdot \frac{1}{7}$; б) $\left[\frac{54(\sqrt{3}-1)}{2+\sqrt{5}} \cdot \frac{9+4\sqrt{5}}{4-2\sqrt{3}} \right] : \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1} - \frac{2}{3}$.

310. Ҷадвалро пур кунед.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \frac{1}{2}x^2$								
$y = -x^2$								
$y = 1 + 4x^2$								

311. Сумма ва фарқи рақамҳои адади дурақама, мувофиқан, ба 5 ва 1 баробар аст. Ададро ёбед.
312. Дарозии яке аз тарафҳои росткунҷа назар ба дигараш 5 см зиёдтар аст. Агар масоҳаташ 104 см^2 бошад, тарафҳои онро ёбед.
313. Мошини сабукрав 100 км роҳи мумфарш ва 135 км роҳи сангфаршро тай намуд. Дар роҳи сангфарш ронанда суръатро 5 км/соат кам кард. Суръати аввалии мошинро ёбед, агар маълум бошад, ки тамоми роҳ дар муддати 5 соат тай карда шудааст.
314. Системаи якҷинсаи

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 5 \\ x^2 - 2xy = -1 \end{cases} \text{ -ро ҳал кунед.}$$

МАЪЛУМОТИ ТАЪРИХИ

Дар бораи муодилаҳо. То Р. Декарт муодилаи дараҷаи як дар шакли $ax=b$ навишта мешуд. Дар давраи фаъолиятш бошад, муодилаи номбурда намуди умумии $ax+b=0$ -ро гирифта буд. Дар шакли каноникии $f(x)=0$ (яъне бо тарафи ростии ба нул баробар) навишта истода, Декарт аввалин шуда муодилаи алгебравиро чун вобастагии байни x ва y , ки мавқеи нуқтаҳо дар ҳамвории координатавӣ ифода мекунад, дида мебарояд. (Ин намуди навишт баъзан дар корҳои Т. Гариотта ва тасодуфан дар корҳои Штифел вомехуранд).

Намудҳои ҷузъии муодилаҳои квадратиро ҳанӯз чор ҳазор сол неш бобулиён ҳал мекарданд. Дар бораи таърихи тараққиёти минбаъдаи ҳалли муодилаҳои тартиби ду ҳонанда маълумоти заруриро аз китоби дарсии синфи 8 ёфта метавонад.

Тарзҳои ҳалли муодилаҳои дараҷаи аз ду боло бошад (аниқтараш сеюм), ба юнониҳо ва арабҳо маълум набуд.

Дар рисолаҳои алгебравии онҳо бештар муодилаҳо ва системаи муодилаҳои дараҷаи якуму дуҷум вомехуранд. Алалхусус, дар байни он тадқиқотҳо ҳалли муодилаҳои кубии намуди ҷузъидошта диққатҷалбкунандаанд. Бояд қайд намуд, ки тарзи ҳаллашон ба ёфтани қиматҳои тақрибии решаҳо оварда расонида шудаанд.

Шоир, файласуф ва риёзидони форсу тоҷик Умари Хайём (1048–1131) дар асараш «Рисола фи-л-бароҳин ало масоил-ил-ҷабр ва-л муқобала» ҳалли муодилаҳои тартиби як, ду, се ва баъзе намудҳои махсусро овардааст. Муодилаҳои тартиби як, ду ва се Хайём ба се гурӯҳ ҷудо карда, бо тарзи геометрии ҳал кардааст. Дар поён классификасияи Хайёмро, ки фақат муодилаҳои тартиби сеюм дарбар мегирад, меоварем: 1) намудҳои одӣ ($x^3=a$, $x^3=cx^2$, $x^3=bx$); 2) намудҳои мураккаб ($x^3+cx^2=bx$, $x^3+bx=cx^2$, $x^3=cx^2+bx$, $x^3+bx=a$, $x^3+a=bx$, $x^3=bx+a$, $x^3+cx^2=a$, $x^3+a=cx^2$, $x^3=cx^3+a$), 3) намудҳои чораъзогиро дарбаргиранда ($x^3+cx^2+bx=a$, $x^3+cx^2+a=bx$, $x^3+bx+a=cx^2$, $x^3=cx^2+bx+a$, $x^3+cx^2=bx+a$, $x^3+bx=cx^2+a$, $x^3+a=cx^2+bx$).

Ногуфта намонад, ки муодилаи намуди умумии дараҷаи сеюми $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ($a\neq 0$) бо ёрии ивази як тағйирёбанда ба тағйирёбандаи нави дигар ба муодилаи намуди $x^3+px=q$ оварда мешавад. Дар таҳқиқи ҳалли муодилаи охириин як қатор риёзидонони итолиёӣ ба монанди С.Д.Ферро (1465-1526), Н. Тартал (1499-1557), Д. Кардано (1501-1576), Л. Феррари (1522-1565) ва Р. Бомбелли (1530-1572) ҳиссаи арзанда гузоштаанд.

Аз он ҷумла Ссипион Дал Ферро ба ҷустуҷӯи формулаи решаҳои мусбати муодилаи дар боло номбаршудаи $x^3+px+q=0$, ки $p>0$ ва $q>0$ аст, машғул шуда буд. Ин таҳқиқоти худро махфӣ нигоҳ дошта, фақат дар охири ҳаёташ ба шогирдонаш ҳабар дод. Ҳамва-

тани дигари Ферро Н. Тартал бошад, дар як вақт ба масъалаи ҳалли муодилаҳои тартиби сеюм машғул гашта, тарзҳои ҳалли муодилаҳои $x^3+px=q$; $x^3=px+q$, $x^3+q=px$ ва баъзе ҳолатҳои ҷузъии муодилаи $x^3+px+q=0$ ($p, q>0$)-ро ёфт. Д. Кардано, ки аз соли 1539 ба ҳалли муодилаҳои кубӣ машғул буд, аз кашфиёти Тартал бохабар шуда, дар китоби «Санъати бузург ё дар бораи қоидаҳои алгебра»-и соли 1545 навиштааш, дар баробари масъалаҳои дигари алгебра тарзҳои умумии ҳалли муодилаҳои кубиро баён кард. Инчунин, дар китоб Кардано усули ҳалли муодилаи тартиби чоруми шогирдаш Феррари кашфкардaro чой дод.

Ба Тартал ё ба Кардано тааллуқ доштани кашфи формулаи решаҳои муодилаи кубӣ то ҳол маълум нест, аммо ҳаминаш аниқ аст, ки ҳарду муодилаҳои кубиро пурра таҳқиқ ва ҳал накардаанд. Дар таҳқику ҳалли пурраи масъалаи болоӣ хизмати Р. Бомбеллӣ бузург аст.

Ҷамшед ибни Масъуд ибни Маҳмуд Гиёсиддин Кошонӣ, ки бо таҳаллуסי ал-Кошӣ дар илм маълум аст (донипманди бузурги асри XV), ғайр аз муодилаҳои дараҷаи як ва ду боз муодилаҳои дараҷаи сеюм ва чорумро дида баромадааст. Танҳо ҳудаш 70 намуди ин гуна муодилаҳоро бо ҳар гуна роҳҳои сунъӣ ҳал намудааст.

Ф. Виет (1540-1603) дар асоси аломатҳои (рамзҳои) алгебравии такмилдодааш масъалаҳоеро дида баромадааст, ки ба ҳалли муодилаҳои дараҷаи сеюму чорум вобастаанд. Дар формулаҳои решаҳои муодилаҳои дараҷаҳои сеюму чорум аломати радикал, аниқтараш решаҳои дараҷаи 2-юм, 3-юм ва 4-ум мавҷуд аст.

Ниҳоят, қайд мекунем, ки риёзидонон баъди аниқ кардани формулаҳои ҳалли муодилаҳои дараҷаи се ва чор дар муддати қариб 300 сол фаёлиятанонро ба ҷустуҷӯи ҳалли муодилаҳои дараҷааш дилхоҳи аз 4 боло равона сохтанд, вале ба ягон натиҷаи назаррасе соҳиб нашуданд. Фақат дар солҳои 20-уми асри XIX риёзидони норвегӣ Н. Абел (1802-1829) дар ин соҳа кашфиёте намуд. Ӯ исбот намуд, ки решаҳои муодилаи дараҷаи аз 5 калон ё ба он баробар бо радикалҳо ифода карда намешаванд.

Дар бораи системаи муодилаҳо. Маълум аст, ки системаи ду муодилаи хаттии дуномаълумаро бо роҳи истисноӣ номаълумҳо ҳал мекарданд. Дар асрҳои XVII-XVIII роҳҳои истисноӣ номаълумҳоро Ферма, Нютон, Лейбнитс, Эйлер, Безу, Лагранж ва дигарон қор карда баромадаанд. Дар навишти ҳозиразамон системаҳои дар боло номбурда намуди умумии

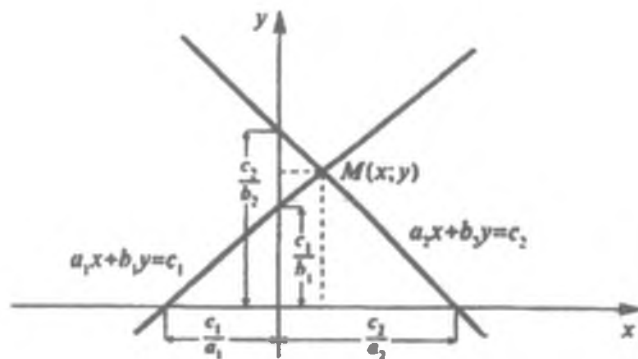
$$a_1x+b_1y=c_1, \quad (1)$$

$$a_2x+b_2y=c_2,$$

-ро доранд. Ҳалли системаи (1) бо формулаҳои

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad (2)$$

ифода карда мешавад. Индексҳои дар поёни ҳарфҳо чойгиршударо



Расми 65

аввалин шуда риёзидон ва файласуфи немис Готфрид Вилгелм Лейбнитс дохил кардааст, ки ин пешниҳодот дар эҷодшавии назарияи муайянкунандаҳо таъсири худро бештар расонидааст.

Дар асоси методи координатаҳо*,¹ ки дар асри XVII Декарт кашф карда буд, ҳалли геометрии системаи муодилаҳои хаттии (1) амалӣ гардид. Методи графیکی ҳалли система аз сохтани абсиссаи x ва ординатаи y -и нуқтаи буриши ду хати рост иборат мебошад. (Расми 65.)

Акнун ба таърихи пайдояиш ва ҳалли системаҳои ғайрихаттӣ назар мекунем. Дар дастхатҳои бобулиёни қадими асрҳои III-II пеш аз эраи мо масъалаҳои зиёде ёфт шудаанд, ки бо ёрии тартибдиҳии системаи муодилаҳои тартиби дуру дарбаргиранда ҳалли худро ёфтаанд. Ба сифати мисол яке аз масъалаҳои ин дастхатро мегирем: «Масоҳати ду квадрати худро ман чамъ кардам: $25\frac{5}{12}$. Тарафи квадрати дуҷум ба $\frac{2}{3}$ ҳиссаи квадрати якум ва боз 5 баробар аст». Системаи ба ин матн мувофиқоянда дар навишти ҳозиразамон намуди

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25\frac{5}{12} \\ y = \frac{2}{3}x + 5 \end{cases} \quad (3)$$

дорад. Муаллифи масъала y -ро дар муодилаи дуҷуми системаи (3) ба квадрат бардошта, дар асоси формулаи квадрати сумма (ин формула ба y маълум будааст) ҳосил мекунанд.

$$y^2 = \frac{4}{9}x^2 + \frac{20}{3}x + 25$$

* Новобаста ба Декарт ва қариб дар як вақт, ин методро риёзидони дигари фаронсавӣ Пер Ферма кашф намудааст. Вале ин кашфиёти ӯ баъди 14 соли вафоти муаллиф (яъне с. 1679) ба ҷоп расид.

Қимати ёфтаашро ба муодилаи якуми система гузошта, ба муодилаи квадратии

$$1\frac{4}{9}x^2 + 6\frac{2}{3}x = \frac{5}{12}$$

меояд. Аз рӯи қоидаҳои ба имруза монанд ин муодиларо ҳал карда, муаллиф аввал x ва баъд y -ро меёбад. Гарчанде бобулиён рамзҳои алгебравӣ надошта бошанд ҳам, масъалаҳоро бо методҳои алгебравӣ ҳал мекарданд.

Диофант бисёр номаълумҳоро бо рамзҳо ишорат накарда бошад ҳам, аммо номаълумро тавре интиҳоб мекард, ки ҳалли система ба ёфтани ҳалли як муодила табдил меёфт. Масъалаи зеринро аз «Арифметика»-и ӯ мегирем: «Ду ададERO ёбед, ки суммаашон ба 20 ва суммаи квадраташон ба 208 баробар бошад». Ҳалли ин масъаларо мо, одатан, аз тартиб додани системаи

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ x^2 + y^2 = 208 \end{cases}$$

сар мекардем.

Диофант бошад, ба сифати номаълум ними фарқи ададҳои матлубро гирифта (дар ишоратҳои ҳозира), ҳосил мекунад:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x - y) = z \\ \frac{1}{2}(x + y) = 10 \end{cases}$$

Ин муодилаҳоро ҷамъ ва тарҳ намуда (ҳамаи ин амалиётҳоро ӯ даҳонакӣ иҷро менамояд), пайдо мекунад:

$$x = z + 10, \quad y = 10 - z$$

Аз ин ҷо, $x^2 + y^2 = (z + 10)^2 + (10 - z)^2 = 2z^2 + 200$ ва баъди гузориш ба муодилаи дуҷум $2z^2 + 200 = 208$ -ро ҳосил мекунад. Аз муодилаи охи-рин бо осонӣ $z = 2$, $x = 2 + 10 = 12$; $y = 10 - 2 = 8$ -ро меёбад.

Ҳалли системаи муодилаҳо диққати Алоуддини Кушчӣ (1402-1474) ва Баҳоуддини Омулиро (1546-1622) ба худ ҷалб кардааст. Баҳоуддин дар охири китоби худ «Хулосат-ул-ҳисоб» ҳафт масъалаеро пешниҳод мекунад, ки барои исботи вучуд доштан ва надоштани ҳалли онҳо мафҳуми васеи назарияи ададҳо зарур буд. Ба ибораи Баҳоуддин, барои ёфтани ҳалли масъала бисёр олимон машғул буданд, аммо натиҷаи дилхоҳ ба даст наомад.

Ба сифати мисол масъалаи ҳафтумашро мегирем*. «Ба квадратии адад решааш ва адади ду ҷамъ карда шавад, то ки маҷмӯи квадрат ҳосил гардад. Аз он квадрат решааш ва адади ду кам карда шавад, боз квадрат ҳосил гардад». Ин масъала ҳалли системаи

* Хонанда шаш масъалаи аввалашро аз саҳифаи 123-126-и китоби Г. Собиров «Инкишофи математика дар Осиёи Миёна (асрҳои XV-XVII)», Душанбе, Ирфон, 1966 ёфта метавонад.

$$\begin{cases} x^2 + x + 2 = y^2, \\ x^2 - x - 2 = z^2. \end{cases}$$

-ро талаб мекунад

Неселман ин масъаларо нодуруст тарҷума намуда, системаи зеринро тартиб медихад:

$$\begin{cases} x^2 + x + 2 = y^2, \\ x^2 + x - 2 = z^2. \end{cases}$$

Барои ин система Неселман ҳалли

$$x = \frac{34}{15}, \quad y = \frac{46}{15} \quad \text{ва} \quad z = \frac{14}{15}$$

-ро нишон медихад, ки он аслан системаи Омулиро қаноат менамояд.

Дар поён баъзе мисолу масъалаҳоеро меорем, ки риёзидонони гузашта машғули ҳаллашон буданд:

1. Аз «Арифметика»-и Диофант:

а) $\begin{cases} x + y = 20, \\ x^2 - y^2 = 80; \end{cases}$

(ҷавоб: $x=12, y=8$)

б) $\begin{cases} x = 3y, \\ x^2 + y^2 = 5(x + y); \end{cases}$

(ҷавоб: $x=6, y=2$)

в) $\begin{cases} x = 3y, \\ x^2 + y^2 = 10(x - y); \end{cases}$

(ҷавоб: $x=6, y=2$)

г) $\begin{cases} x = 3y, \\ x^2 - y^2 = 12(x - y); \end{cases}$

(ҷавоб: $(0; 0), 9; 3$)

г) $\begin{cases} x = 3y, \\ y^2 = 6x; \end{cases}$

(ҷавоб: $(54; 18)$)

д) $\begin{cases} x = 3y, \\ y^2 = 6(x - y); \end{cases}$

(ҷавоб: $(36; 12)$)

е) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - y^2 = (x - y) + 20; \end{cases}$

(ҷавоб: $(6\frac{1}{2}; 4\frac{1}{2})$)

2. Аз «Алҷабр ва-л-муқобала»-и Муҳаммади Хоразмӣ:

а) $\begin{cases} x + y = 10, \\ xy = 21; \end{cases}$

(ҷавоб: $7, 3$)

б) $\begin{cases} x + y = 10, \\ x^2 - y^2 = 40; \end{cases}$

(ҷавоб: $7, 3$)

в) $\begin{cases} x + y = 10, \\ x^2 + y^2 = (x - y) + 54; \end{cases}$

(ҷавоб: $7, 3$)

г) $\begin{cases} x + y = 10, \\ x^2 = 4xy; \end{cases}$

(ҷавоб: $(8; 2)$)

г) $\begin{cases} x + y = 10, \\ (x + y)^2 = 2\frac{7}{9}x^2; \end{cases}$

(ҷавоб: $(6; 4)$)

д) $\begin{cases} x + y = 10, \\ \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 2\frac{1}{6}; \end{cases}$

(ҷавоб: $(6; 4)$)

е) $\begin{cases} x + y = 10, \\ y^2 = 81x; \end{cases}$

(ҷавоб: $(1; 9)$)

ж) $\begin{cases} x + y = 10, \\ x: (y - x) = \frac{3}{4}; \end{cases}$

(ҷавоб: $(3; 7)$)

3. Аз «Китоби абак»-и Л. Фибоначи (Пизанский):

$$а) \begin{cases} xy - y = 42, \\ x - y = 2; \end{cases} \quad в) \begin{cases} \left(\frac{x}{y} + 10\right) \left(\frac{y}{x} + 10\right) = 122 \frac{2}{3}, \\ x + y = 10; \end{cases}$$

(ҷавоб: (8, 6), (-5; -7) (ҷавоб: (6; 4)

$$б) \begin{cases} xy + y = 40, \\ x - y = 2; \end{cases} \quad г) \begin{cases} x + y = 10, \\ \frac{x}{y}(x - y) = 24; \end{cases}$$

(ҷавоб: (7; 5), (-6; -8) (ҷавоб: (8; 2)

4. Аз китоби «Косс»-и Рудолф

$$а) \begin{cases} (x + y)(x^2 + y^2) = 539200, \\ (x - y)(x^2 - y^2) = 78400; \end{cases} \quad б) \begin{cases} xy + x + y = 573, \\ x^2 + y^2 - x - y = 1716; \end{cases}$$

(ҷавоб: (64; 36), (36; 64) (ҷавоб: (40; 13)

5. Аз «Арифметикаи умумӣ»-и Нютон:

а) «Тарафҳои $AB=a$, $AC=b$ ва асоси $BC=c$ -и секунҷаи ABC дода шудааст. Аз қуллаи кунҷи A ба асос баландии AD ғуруварда пудааст. Дарозии порчаҳои BD ва DC -и асосро ёбед». (Ҷавоб:

$$BD = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}, \quad DC = c - BD).$$

б) «Периметр ва масоҳати секунҷаи росткунҷа дода шудааст.

Гипотенузаи BC -ро ёбед». (Ҷавоб: $BC = a - \frac{b^2}{a}$, a - нимпериметр ва b^2 - масоҳат.

Машқҳои иловагӣ ба боби II

Ба параграфи 5

15. Муодиларо ҳал кунед:

$$\begin{array}{ll} а) 2x^6 - 8x^4 = 0; & г) x^6 - 64 = 0; \\ б) 0,1x^5 - 0,0001x^2 = 0; & д) x^3 + x - 2 = 0; \\ в) x^4 = x^2; & е) 4x^3 - 3x - 1 = 0; \\ г) x^4 - 625 = 0; & ё) (x-1)(x-2) + 3(x-2)^2 = 0; \end{array}$$

16. Муодиларо ҳал кунед:

$$\begin{array}{ll} а) x^5 - 6x^4 + 7x^3 + 18x^2 - 44x + 24 = 0; & в) 2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0; \\ б) 2x^5 + 3x^4 - 10x^3 - 15x^2 + 8x + 12 = 0; & г) x^5 - 4x^4 + 4x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0; \end{array}$$

17. Решаи муодиларо ёбед:

$$\begin{array}{ll} а) ax^2 + ax - a - bx - bx^2 + b = 0; & в) 8bx^2 - 2a(1-2b)x - a^2 = 0; \\ б) bx - cx + ax - cx^2 + bx^2 + ax^2 = 0; & г) 4x^2 - 12bx - 4a^2 + 9b^2 = 0; \end{array}$$

18. Қасро ихтисор кунед:

$$\begin{array}{lll} а) \frac{15x^2 - 8bx + b^2}{12x^2 - bx - b^2}; & в) \frac{a^2 + 6a - 91}{a^2 + 8a - 105}; & г) \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 5x + 4}; \\ б) \frac{12a^2 - a - 1}{3a^2 + 5a - 2}; & г) \frac{8x^2 + 32x - 360}{6x^2 - 72x + 210}; & д) \frac{b^3 - 3b^2 + 2b}{2b^2 - 7b + 5}; \end{array}$$

319. Барои кадом кимати p муодилаи зерин ду реша дорад:
 а) $3x^2+px-9=0$; б) $2x^2-x+p=0$?
320. Барои кадом кимати q муодилаи зерин надорад:
 а) $5x^2-4x+q=0$; б) $6x^2-qx+2=0$?
321. Ҳамон қиматҳои m -ро ёбед, ки барояшон муодилаи зерин ягона реша дорад:
 а) $8x^2-4mx+5=0$; б) $7mx^2-x-6=0$;
322. Муодилаи $x^3=4x$ -ро бо ду тарз: графӣ ва ба зарбкунандаҳо ҷудокуни ҳал намоед.
323. Бо тарзи гузориш муодиларо ҳал кунед:
 а) $(x^2+3)^2-4(x^2+3)+3=0$; е) $(x^2-4x+4)^2-5(x^2-4x+4)+4=0$;
 б) $(x^2+2x-3)(x^2+2x-4)-20=0$; ё) $(x^2-6x+9)^2-10(x^2-6x+9)+9=0$;
 в) $(x^2+3x)(x^2+3x-1)=12$; ж) $4(x^2-10x+25)-5(x^2-10x+25)+1=0$;
 г) $(x^2+5x+8)^2-6(x^2+5x+8)+8=0$; з) $(5x^2-4)^2+6(5x^2-4)-7=0$;
 ғ) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-27\left(x+\frac{1}{x}\right)+50=0$ и) $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55$
 д) $(x^2-x-1)(x^2-x+1)=3$ к) $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81$
324. Яке аз касрҳои ба ҳам ҷамъшавандаҳо бо t ва дигарашро бо $\frac{1}{t}$ ишорат намуда, муодиларо ҳал кунед:
 $\frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = 2,9$; б) $\frac{x^3-x^2}{1} - \frac{8}{x^3-x^2} = 2$;
325. Бовар ҳосил намоед, ки муодилаи зерин реша надорад:
 а) $7x^4+19x^2+91=0$; б) $3x^6+21x^4+71x^2+2=0$.
- Оё муодиларо ҳал накарда, ба ин ҳулоса омадан мумкин аст?
326. Муодилаи биквадрати ҳал кунед:
 а) $3x^4-13x^2+10=0$; ж) $9x^4-10x^2+1=0$;
 б) $9x^4-x^2-8=0$; з) $100x^4-13x^2+0,36=0$;
 в) $7x^4-2x^2-104=0$; и) $3x^4-75x^2+432=0$;
 г) $x^4-5x^2+4=0$; к) $x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2=0$;
 ғ) $x^4-13x^2+36=0$; л) $16x^4-4(a^2+b^2)x^2+a^2b^2=0$;
 д) $x^4-25x^2+144=0$; м) $x^4+x^2+1=0$;
 е) $x^4-41x^2+400=0$; н) $x^4+x^2-1=0$;
 ё) $4x^4-5x^2+1=0$; о) $x^4-6x^2+9=0$;
327. Барои кадом қиматҳои a муодилаи $2x^4-12x^2+a=0$
 а) чор реша дорад; б) ду реша дорад; в) реша надорад?

Ба параграфи 6

328. Оё ҷуфти қиматҳои
 а) $x=1, y=3$; б) $x=0, y=0$; в) $x=-2, y=2$; г) $x=-1, y=-3$ ҳалли муодилаи дуномаълуми $x^2-y=4$ шуда метавонад?
329. Нишон диҳед, ки муодилаи:
 а) $(x+5)^2+(y-3)^2=-9$ ҳал надорад;
 б) $(x-7)^2+(y+3)^2=0$ ҳалли ягона дорад.

330. Графики муодилаи дуномаълумаро созед:

а) $3x+4y-12=0$; в) $x^2-y+1=0$; г) $x^2+(y-2)^2=9$;

б) $-2x+3y+6=0$; г) $(x-1)^2+y^2=2\frac{1}{4}$; д) $(x-2)^2+(y-3)^2=\frac{9}{4}$

331. Аз рӯйи муодилаи давраи додашуда координатаҳои марказ ва дарозии радиусро ёбед:

а) $x^2+y^2-20=0$; в) $x^2+y^2-x-y=15,5$;

б) $x^2+y^2-2x-10=0$; г) $x^2+y^2-2x+2y-23=0$;

332. Системаи муодилаҳоро бо тарзи графикӣ ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x - 3y = -4 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x^2 + (y-1)^2 = 16; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 9, \\ y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y-1 = 0; \end{cases}$

333. Графикҳоро насохта, координатаҳои нуқтаҳои буриши хатҳои зеринро ёбед:

а) параболаи $y=2x^2-5x+4$ ва хати ростии $7x-y-6=0$;

б) параболаи $y=4x^2-x+1,5$ ва хати ростии $y=4,5$;

в) давраи $x^2+y^2=68$ ва хати ростии $3x+y=14$;

г) давраи $x^2+y^2=4$ ва параболаи $x-2y^2=-3$;

г) гиперболаи $xy=2$ ва параболаи $2x^2+7x-2y=5$.

334. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x^2 + xy = 9 + 3y, \\ 3x + 2y = -1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3x + y = 33, \\ x^2 - y^2 + 2x - y = 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ x^2 + xy = y - 5; \end{cases}$ ё) $\begin{cases} 2(x+y)^2 - 3(x+y) = 35, \\ xy - (x+y) = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2y^2 + 2xy = 80, \\ x - y = 2; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x^2 - xy = 3, \\ xy + y^2 = 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 5, \\ 2x + y = 3; \end{cases}$ з) $\begin{cases} (x+y)^2 + 2(x+y) = 99, \\ (x-y)^2 - (x-y) = 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x^2 - 4y^2 = -1, \\ x + y = 2; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x^2 - 3xy + 9y^2 = 67, \\ x^2 + 3xy + 9y^2 = 103; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3xy + 4x - 3y = 5, \\ x + y = 3; \end{cases}$ к) $\begin{cases} x^2 + xy = 36, \\ xy + y^2 = 45; \end{cases}$

335. Бо истифодаи формулаҳои (5)-и п. 19 системаи симметрии зеринро ҳал кунед:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y = \frac{5}{2}xy, \\ x^3 + y^3 = 8\frac{1}{8}; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 30, \\ x^2 + y^2 + xy = 27; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 133, \\ x^2 - xy + y^2 = 7; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 6, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 21, \\ (x + y + xy = 9; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 18\frac{2}{3}, \\ x + y = 8; \end{cases}$$

336. Агар сеаъзогии квадрати $ax^2-3x+2b$ ба сеаъзогии квадрати $x^2+2ax-3$ зарб карда шавад, бисёраъзогии дараҷаи чорум ҳосил мешавад, ки дар он коэффитсиентҳои назди x^3 ва x^2 , мувофиқан, ба 5 ва 10 баробаранд, a ва b -ро ёфта, бисёраъзогии ҳосилшударо дар шакли стандартӣ нависед.
337. Суммаи ду адад ба 20 ва ҳосили зарбашон ба 75 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.
338. Периметри росткунча ба 24 м баробар аст. Агар яке аз тарафҳои онро 2 м кам ва дигарашро 3 м зиёд кунем, он гоҳ масоҳаташ 2 маротиба зиёд мешавад. Тарафҳои росткунчаро ёбед.
339. Масоҳати росткунча ба 12 м^2 баробар аст. Агар дарозияшро 1 м кам карда, барашро бетағйир гузорем, он гоҳ квадрат ҳосил мешавад. Дарозии росткунчаро ёбед.
340. Дарозии тарафҳои ду квадрат бо ададҳои 5 ва 4 мутаносибанд. Агар тарафҳои ҳар як квадратро 3 см кам кунем, он гоҳ фарқи масоҳати квадратҳои ҳосилшуда ба 24 см^2 баробар мешавад. Тарафҳои квадратҳои додашударо ёбед?
341. Агар сурати касри одиро ба квадрат бардорем ва маҳраҷашро ба 9 воҳид зиёд кунем, он гоҳ касри ба $\frac{1}{4}$ баробар ҳосил мешавад. Агар сураташро 5 воҳид зиёд карда, маҳраҷашро бетағйир гузорем, он гоҳ адади 1 ҳосил мекунем. Касро ёбед.
342. Адади дурақамаеро ёбед, ки суммаи рақамҳои ба 3 ва ба шашчанди ҳосили зарби рақамҳои баробар бошад.
343. Ҳосили ҷамъи рақамҳои адади дурақама ба 8 ва зарбашон ба 15 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.
344. Квадрати касри дурусти одӣ дар сумма бо чорчандаш ба $\frac{57}{16}$ баробар аст. Агар суммаи сурат ва маҳраҷашро 5 воҳид зиёд

кунем, он ба ҳосили зарби сурат ва махрачаш баробар мешавад. Касрро ёбед.

345. Аз ду шахре, ки масофаи байнашон 360 км аст, дар як вақт ду мошин ба пешвози якдигар баромаданд ва баъди 4 соат ба якдигар дучор шуданд. Яке аз мошинҳо назар ба дигараш дар ҳамаи роҳ 1 соату 48 дақиқа зиёдтар вақт сарф мекунад. Суръати ҳар як мошинро ёбед.

346. Ду қатора аз стансияҳои A ва B , ки масофаи байнашон 600 км аст, дар як вақт ба пешвози якдигар ба роҳ баромаданд. Қатори якум ба стансияи B , назар ба қатори дуюм ба стансияи A 3 соат пештар омада расид. Инчунин маълум аст, ки ҳангоми 250 км-ро тай кардани қатори якум қатори дуюм 200 км роҳро мепаймояд. Суръати ҳаракати қатораҳо ёбед.

347. Аз ду пункт, ки масофаи байнашон 650 км аст, ду велосипедрон ба пешвози якдигар баромаданд. Агар ҳардуи онҳо ҳаракатро дар як вақт сар кунанд, он гоҳ вохӯрӣ баъди 10 соат ва ҳангоми 4 соату 20 дақиқа пештар ба роҳ баромадани велосипедрони дуюм вохӯрӣ баъди 8 соат ба амал меояд. Суръати ҳаракати ҳар як велосипедронро ёбед.

348. Гипотенузаи секунҷаи росткунҷа ба $\sqrt{181}$ см ва масоҳаташ ба 45 см^2 баробар аст. Дарозии катетҳои секунҷаи росткунҷаро ёбед.

349. Периметри росткунҷа ба 14 м ва масоҳаташ ба 12 м^2 баробар аст. Дарозӣ ва бари росткунҷаро ёбед.

350. Адади дурақама аз чорчанди суммаи рақамҳои 3 воҳид зиёд аст; агар ба ин адад 18-ро илова кунем, он гоҳ ададе ҳосил мешавад, ки он 18 воҳид аз адади рақамҳои нисбати адади аввала чаппа ҷойгир буда, хурд аст. Ин ададро ёбед.

351. Агар ба сурати каср 2-ро ҷамъ кунем, он гоҳ воҳид ҳосил мешавад; агар ба махраҷ 3-ро илова кунем, он гоҳ каср ба $\frac{1}{2}$ баробар мешавад. Ин касрро ёбед.

*352. Агар талаба ду адади дурақамаи дар тахтаи синф навишташударо дуруст зарб мекард, он гоҳ $\bar{u}$ 2250 ҳосил мекард. Вале $\bar{u}$ ҳангоми рӯйбардоркунии шартӣ мисол дар яке аз ададҳо ба ҷойи рақами охири 5 рақами 6-ро навишт ва дар натиҷаи зарб 2300-ро ҳосил кард. Талаба бояд кадом ададҳоро зарб менамуд?

353. Ду ғуруҳи сайёҳони ҷавон аз маҳалҳои A ва B , ки масофаи байнашон 30 км аст, ба пешвози ҳамдигар ба роҳ баромаданд. Агар ғуруҳи якум нисбат ба ғуруҳи дуюм 2 соат пештар ба роҳ барояд, он гоҳ онҳо баъд аз 2,5 соати ба роҳ баромадани ғуруҳи дуюм вохӯранд. Агар ғуруҳи дуюм нисбат ба ғуруҳи якум 2 соат пештар ба роҳ барояд, он гоҳ вохӯрӣ баъд аз 3 со-

ати ба роҳ баромадани гурӯҳи якум ба амал меояд. Гурӯҳҳо бо кадом суръат ҳаракат мекунанд?

354. Дар адади дурақамаи мусбат рақамаи даҳӣҳо аз рақамаи воҳидҳо ду маротиба калон аст. Ин ададро ёбед, агар ҳосили зарби ӯ ва суммаи рақамҳояш ба 252 баробар бошад.
355. Масъалаи зеринро аз «Дастнависҳои Бахшамийск» ҳал кунед: «Ададҳо ёбед, ки аз иловакунӣ ба 5 воҳид ва камкунӣ ба 11 воҳид квадрати пурраро ташкил намояд».

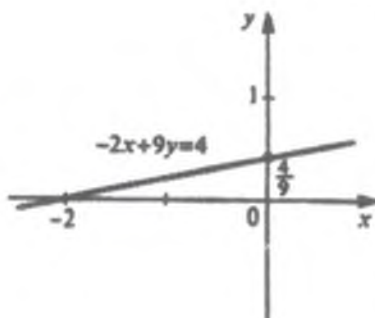
ҶАВОБҲО

160. а) Ҳа; б) не; в) ҳа; г) не; ғ) не; д) ҳа. 161. а), б), в), г), д), ж) – муоди-
лаҳои бутун. 162. а) 11; б) 9; в) 6; г) 1; ғ) 3; д) 2; ё) 3; ж) 1; з) 2; и) 4; к)
2; л) 4; м) 2; н) 2; о) 5; п) 4. 163. а) 0,376; б) 614; в) 4,82; г) $\frac{95}{216}$; ғ) $6\frac{1}{4}$.
164. Баъди кушодани қавсҳо $5,5m-0,5n$ -ро ҳосил мекунем, ки кима-
таш барои m ва n -и додашуда ба -9 баробар аст. 166. 60 км. 167.
 $S=2a^2$. $P=6a$, a – яке аз тарафҳои росткунҷа. 168. а), в) - чуфт. б) –
тоқ. 169. $\forall x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (3; +\infty)$. 170. 6км/соат. 171. а) $x=-1,5$; б)
 $x=8$; в) $y=0$; г) $y=2$; ғ) $x_1=1$, $x_2=7$; д) $x_{1,2}=a \pm b$; ё). $x_1=a-1$, $x_2=a-2$; ж)
 $x_1=1$, $x_2=-\frac{a^2+a+1}{a}$. 172. а) $x=-2$, б) $x_1=-\frac{1}{6}$, $x_2=\frac{1}{6}$; в) $y_1=2$, $y_2=-\frac{5}{2}$;
г) $x_1=-1$, $x_2=1$. 173. а) $x_1=0$, $x_2=\frac{5}{2}$; б) $x=1\frac{1}{3}$; в) $x=4$; г) $x_1=5$,
 $x_2=-\frac{22}{3}$ ғ) $x=1$; д) $x=2$. 174. а) $b=\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 8; \pm 12; \pm 24$; б)
 $\pm 1; \pm 3; \pm 7; \pm 21$. 175. а) Барои ҳамаи p -ҳои $p > -13$; б) барои ҳамаи p -
ҳои $p > \frac{5}{8}$. 177. а) $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=2$; б) $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{3}$. 178. а) $m < 4$;
б) $m < -\frac{2}{3}$; в) $m < \frac{1}{4}$; г) $m \in \mathbb{R}/[-4; 4]$; ғ) $m < 1\frac{1}{24}$; д) $m < \frac{9}{2}$;
ё) $m > -\frac{1}{16}$; ж) $m > -\frac{9}{5}$. 179. а) $k=\frac{9}{32}$; б) $k=\frac{1}{4}$; в) $k=\pm 4\sqrt{5}$; г)
 $k=\pm 8$; ғ) $k=\frac{8}{7}$; д) $k=-\frac{2}{9}$; ё) $k=\frac{15}{4}$; ж) $k=-5 \pm 2\sqrt{10}$. 180. а)
 $t \in (-\frac{12}{5}; \frac{12}{5})$; б) $t \in (-24; 24)$; в) $t \in (-12; 12)$; г) $t \in (-12\sqrt{6}; 12\sqrt{6})$;
ғ) $t \in (-1; 1)$; д) $t < -\frac{1}{12}$; ё) $t > 16$; ж) $t > 12$; 181. а) $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm 6$; б)
 $x=0$; в) $x_1=0$, $x_2=1,5$, $x_3=2$, г) $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=-\frac{1}{5}$; ғ) $x_1=1$, $x_2=2$; д)
 $x=3$; ё) $x \pm 5$; ж) $x_1=1$, $x_2=-6$. 182. а) $x_1=0$, $x_2=\frac{10}{7}$; б) $x_1=0$, $x_2=144$; в)
 $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=4$; г) $x=2$; ғ) $x=-2$; д) *реша надорад*; ё) $x_1=0$, $x_2=-1$,
 $x_3=2$; з) $t_1=0$, $t_{2,3}=\pm 2$; 3) $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=4$; и) $t_1=0$, $t_2=3$; к) $y_1=0$,

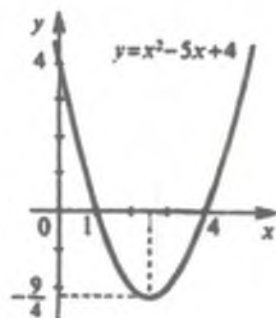
$y_{2,3} = \pm 12$; л) $x_1 = 0$, $x_2 = \pm 0,1$. **183.** а) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$; б) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$; в) $x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x = 0$; г) $x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 26x - 24 = 0$. **185.** Нишондод.
 Дар асоси теоремаи Виет $x_1 + x_2 = -\frac{5}{2}$ ва $x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{2}$ -ро навишта, аз квадрат
 ва куби суммаи $x_1 + x_2$ барои б) ва в) ҷавоб ёфтан мумкин аст. а) -4 ; б) $\frac{37}{2}$; в) $-26,875$. **186.** 18. **188.** а) $\frac{15}{64}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 1800. **189.** $\begin{cases} 3x + 6, x \geq -2; \\ -3x - 6, \text{барои } x < -2; \end{cases}$ б)
 $\begin{cases} 2, \text{барои } x \geq -2; \\ -2x - 2, \text{барои } x < -2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - x, \text{барои } x \in R/(0; 1); \\ -x^2 + x, \text{барои } x \in (0; 1). \end{cases}$ **190.** 7,5см, 10,5см,
 12см. **191.** 15 606 сомони. **192.** 8 рӯз. **194.** а) $\forall x \in (-\infty; 42)$; б) $\forall x \in (1; 2) \cup (4; +\infty)$; **195.** а) $x=2$; б) $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$, $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{3}$; в) $x_{1,2} = \pm \sqrt{3}$, $x_{3,4} = \pm 3$;
 г) $x_1 = -3, x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{10}$; р) $x_1 = 3$; $x_2 = -4$; д) $x_{1,2} = \pm 2$; ё) $x_{1,2} = \pm 1, x_3 = 3$;
 ё) $x_1 = -3, x_2 = 2$; ж) $x_1 = -1,5, x_2 = 1, x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$; з) $x_{1,2} = \pm 1$; $x_{3,4} = \pm 2$.
196. а) $x_{1,2} = \pm \sqrt{2}, x_{3,4} = \pm \sqrt{3}$; б) $y_{1,2} = \pm \sqrt{2}, y_{3,4} = \pm 1$; в) решаҳои ҳақиқӣ надорад;
 г) $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}, x_{3,4} = \pm 2$; р) $x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, x_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$; д) $y_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, y_{3,4} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$;
 е) $x_{1,2} = \pm 2, x_{3,4} = \pm 4$; ё) $x_{1,2} = \pm 2$; $x_{3,4} = \pm 3$; ж) $x_{1,2} = \pm 5, x_{3,4} = 4$; з) реша
 надорад; и) $x_{1,2} = \pm 2$; к) $t = \pm 1, t_{3,4} = \pm 3$; қ) $y_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}, x_{3,4} = \pm 2$; л) решаи
 ҳақиқӣ надорад; м) $x_{1,2} = \pm \sqrt{2 + \sqrt{3}}, x_{3,4} = \pm \sqrt{2 - \sqrt{3}}$; н) $x_{1,2} = \pm 1$. **197.** а) $A(-2; 0)$,
 $B(2; 0)$, $C\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$, $D\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$ б) $A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; 0\right)$, $B\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; 0\right)$, $C(1; 0)$, $D(-1; 0)$
 в) $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, $C(3; 0)$, $D(-3; 0)$; г) $A(\sqrt{2}; 0)$, $B(-\sqrt{2}; 0)$, $C(5; 0)$, $D(-5; 0)$;
 г) $A\left(\frac{\sqrt{5}}{2}; 0\right)$, $B\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}; 0\right)$, $C(1; 0)$, $D(-1; 0)$; д) $A(1; 0)$; $B(-1; 0)$; е)
 $A(\sqrt{10}; 0)$, $B(-\sqrt{10}; 0)$, $C(1; 0)$, $D(-1; 0)$, ё) $A(1; 0)$, $B(-1; 0)$. **198.** Ҳа. **199.** Ҳа. **200.**
 $0 < k < 1$; ё) $0 < k < 1$. **201.** а) $k = \pm \frac{4}{3}$; б) $k = \frac{25}{144}$. **202.** а) $k < -\frac{1}{10}$; б) $k \in (-12; 12)$.
203. а) $(x-1)(x+1)(9x^2+2)$; б) $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(13x^2+16)$; в) $(2x-1)^2(2x+1)^2$;
 г) $(x-1)(x+1)(7x^2+9)$; **204.** а) решаи ҳақиқӣ надорад. б) $x_1=2, x_2=-2$; в)
 $x=-1$; г) $x_1=1, x_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$. **205.** а) $2 < x < 3$; б) $1 \leq x \leq 7$; в) $-2 < x < 6$;
 г) $x \in (-3; 1) \cup (2; \infty)$; р) $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$; е) $x \in \left[-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right]$. **206.** $\frac{239}{693}$. **208.** а)
 $x+2$; б) $\frac{x+4}{3}$; в) $\frac{3}{1-x}$; г) $x-2$. **209.** 5 ва 6. **210.** Нишондод. Агар суръати ҳаракати
 яке аз автомобилҳоро бо x ишора кунем, он гоҳ суръати ҳаракати автомобили
 дуюм $x+10$ мешавад. Мувофиқи шарт муодилаи $\frac{420}{x} - \frac{420}{x+10} = 1$ -ро ҳосил меку-
 нем, ки аз он натиҷаҳои матлубро пайдо кардан мумкин аст. Ҷавоб: 60км/соат;
 70км/соат. **211.** а) Ҳа; б) Не. **212.** а), г), г). **213.** а) Не; б) ҳа; в) ҳа; г) не.



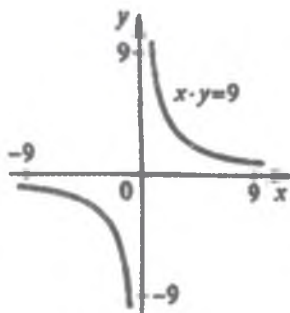
Расми 66



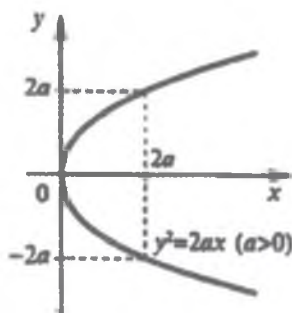
Расми 67



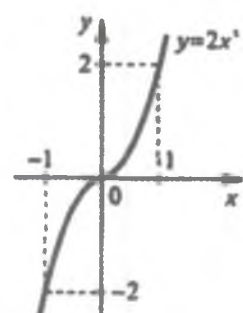
Расми 68



Расми 69

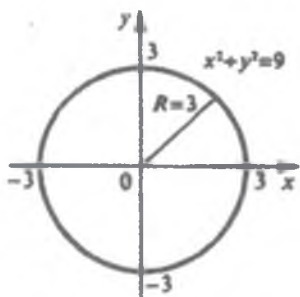


Расми 70

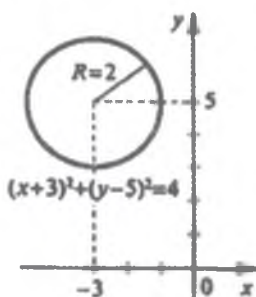


Расми 71

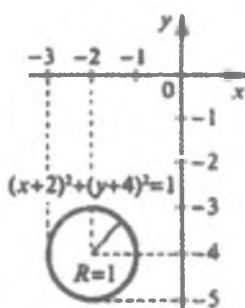
214. а) Расми 66; б) расми 67; в) расми 68; г) расми 69; г) расми 70; д) расми 71.
 215. а) 1; б) 1; в) 2; г) 2; г) 4; д) 6; е) 6; ё) 7; ж) 12; з) 3; и) 4; к) 2. 216. 1. 217. $\frac{400}{9}$.
 218. а) $(x-1)(x+7)$; б) $(2a-x+y)(2a+x-y)$; в) $6(x+2y)^2$; г) $(x-2)(x+2)(x^4+4x^2+16)$.
 219. 500 000 000 сомонӣ. 220. М а с ъ а л а. Суммаи рақамҳои адади дуракама ба 6 ва фарқашон ба 2 баробар аст. Ададро ёбед. (42). 221. а) $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (0; 3)$; б) $x \in (-\infty; -\frac{2}{3}) \cup [1; +\infty)$; ё $x \in \mathbb{R} \setminus (-\frac{2}{3}; 1)$. 222. $x_1 - 10, x_2 = 8$. 223. а) $x=3$ -нулли функция; барои $x < 3f(x)$ мусбат ва барои $x > 3f(x)$ манфӣ мешавад; б) $x=-4$ -нулли функция; барои $x < -4f(x)$ манфӣ ва барои $x > -4f(x)$ мусбат мешавад. 224. а) $A_0(2; 5), R=2$; б) $A_0(-3; 1), R=1$; $A_0(11; -\frac{3}{2}), R = \frac{3}{\sqrt{2}}$; г) $A_0(-5; 1,1) R=1,1$; г) $(\frac{16}{9}; \frac{25}{4}), R=13$; д) $A_0(9; 16), R = \frac{25}{3}$; е) $A_0(-1,44; -0,2), R=0,3$; ё) $A_0(-\frac{1}{4}; \frac{1}{9}), R = \frac{1}{12}$. 225 а) $A_0(\frac{3}{2}; 0), R = \frac{3}{2}$. б) $A_0(0; -2), R = 2$; в) $A_0(\frac{1}{2}; 0), R = \frac{1}{2}$. г) $A_0(1; -1), R = \sqrt{2}$; г) $A_0(-\frac{1}{2}; -2), R = \frac{\sqrt{17}}{2}$; д) $A_0(2; -\frac{1}{2}), R = \frac{3}{\sqrt{2}}$; е) $A_0(1; -4), R = 5$;



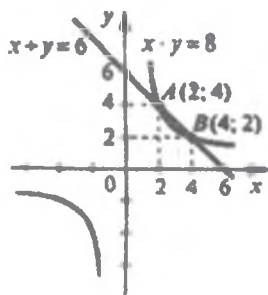
Расми 72



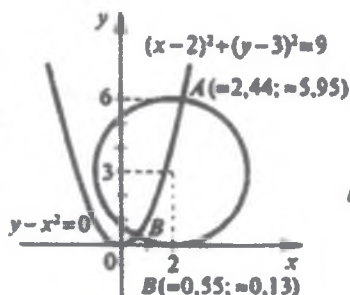
Расми 73



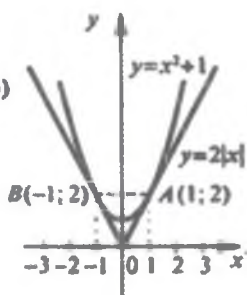
Расми 74



Расми 75



Расми 76

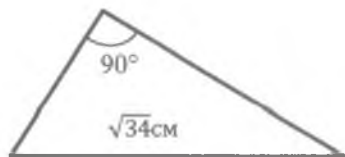


Расми 77

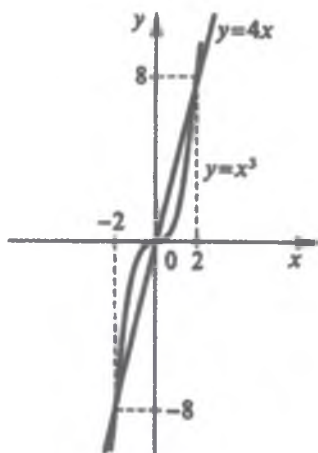
- ё) $A_0(3; 2)$, $R=4$. **226.** а) Расми 72; в) расми 73; г) расми 74. **227.** а) 4; б) 7; в) 2; г) 5; г) 3; д) 5. **228.** Фақат нуктаи $(4; 3)$ ба давраи муодилааш $x^2+y^2=25$ тааллуқ дорад. **229.** а) $(1; -1)$ ва $(1; 1)$; б) $(0; 0)$ ва $(2; 0)$. **230.** а) Не; б) не. **231.** 0,75. **232.** а) 30, б) 4400; в) 23000. **233.** а) $1+\frac{a}{x}$; б) $2-\frac{x}{y}$. **234.** а) $(3; -5)$; б) $(1; 11)$; в) $(-7; -7)$. **235.** $\frac{3}{7}$. **236.** 48 км/соат; 36 км/соат. **237.** а) $x=2$; б) $x=-1$; в) $x=\frac{8}{7}$. **239.** а) Расми 75; м) расми 76; и) расми 77. **241.** $7\frac{1}{9}$. **242.** Дуруст аст. **244.** а) $45^2-31^2>44^2-30^2$; б) $297\cdot 299<298^2$; в) $26^3-24^3>(26-24)^3$; г) $(17+13)^3>17^3+13^3$. **245.** а) $(1; 1)$; б) $(2; 1)$ в) $(2; 2)$; г) $(5; 4)$. **246.** 6 км/соат. **248.** а) $x=0$; б) $x=2$; в) $x=3$. **249.** а) $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{6}$; б) $x_{1,2}=\pm 1$; $x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. **250.** Не. **251.** а) $(5; 2)$, $(3; 0)$; б) $(4; 5)$, $(-8; -7)$; в) $(-6; -6)$, $(2; 10)$; г) $(12; -9)$, $(-3; 6)$; г) $(a; -2a)$, $(-2a; a)$; д) $(3; -5)$, $(-11; 51)$; е) $(1-a; -a-1)$, $(a+1; a-1)$; ё) $(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-\frac{3\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$. **252.** а) $(-3; -\frac{17}{2})$, $(6; 5)$; б) $(-1; 3)$, $(4; -2)$; в) $(-1; 0)$, $(-2; -1)$; г) $(-\frac{10}{7}; -14)$, $(1; 3)$; г) $(3; 1,2)$, $(5,5; 0,7)$; д) $(-2; 2)$,

(3; 4,5); е) (-3,5; 2,5), (3,5;-2,5); ё) (-5; 4), (-3; 8); ж) (6; 2), (-3; -1); з) $\left(0; \frac{5}{2}\right)$; и) $(\pm 8; -6)$; к) (2; 1). **253.** а) $(-4; \pm 3)$, $(4; \pm 3)$; б) $(-10; \pm 8)$, $(10; \pm 8)$; в) ҳал надорад; г) $(-5; 0)$, $(4; \pm 3)$. **254.** а) $(\pm 4; \pm 1)$; б) (7; 7), (8; 6); в) $\left(\frac{4}{9}; -\frac{1}{3}\right)$, $(1; -2)$; г) $(\pm 3; \pm 1)$; ғ) (6; -6), $(-1; 15)$; д) (0; -5), $(1; -4)$. **255.** а) (1,5; -2,5), (2,5; -1,5); б) $(\pm 3; 4)$; в) $(2; \pm 3)$, $(9; \pm \sqrt{2})$; г) $(-4; 2)$; ғ) $(\pm 3; 4)$, $(\pm 4; -3)$; д) $(-14; -13)$, $(-8; -19)$; е) $(4; -7)$; з) $(-1; -3)$, $\left(\frac{9}{2}; 8\right)$. **256.** а) $(2; -3)$ (0,6; 1,2); б) $\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$, (2; 4); в) $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$, $\left(-\frac{12}{11}; -\frac{3}{11}\right)$; г) $\left(-1; \frac{1}{4}\right)$; ғ) $(\pm 3; \pm 1)$; д) $(\pm 4; \pm 2)$, $\left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}; \pm \frac{16}{\sqrt{13}}\right)$. **257.** а) (4; 6), $(-5; 15)$; б) (4; 0), (2,4; 3,2); в) (1; 2), $\left(-1\frac{1}{2}; 3\frac{1}{4}\right)$; г) (0; 6); ғ) $(-4; 0)$; е) $(\pm 3; \pm 3)$. **258.** Нишондод. Системаи $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 3, \\ 2x + y + 9 = 0 \end{cases}$ -ро ҳал карда, боварӣ ҳосил кардан мумкин аст, ки он ҳамҷоя нест. **259.** Графики хати ростии $y - x = \frac{3}{4}$ бо параболаи $y = x^2 - 2x + 3$ дар як нуқтаи $\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right)$ ҳамдигарро мебуранд. **260.** а) (4; 3), (3; 4), (-3; -4), $(-4; -3)$; б) (2; 8), (8; 2); в) (1; 1), яъне давораҳо дар нуқтаи координаташ (1; 1) ба ҳам мерасанд. **261.** а) 0; б) $-\frac{5}{3}$; в) 2,4; г) $\frac{20}{23}$. **262.** а) $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$; б) $D(f) = \mathbb{R}$; в) $D(f) = [-3; +\infty)$. **263.** а) 65,625; б) $29\frac{7}{12}$; в) 2,5. **264.** а) $-\frac{2a+x}{ax}$; б) $-\frac{y-6}{6y}$. **265.** а) $\forall x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$; б) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-2; 3]$. **266.** Соати чордаҳу даҳ дақиқа. **267.** $\frac{2}{5}$. Намунаи матни масъала: «Махраҷи қаср нисбат ба сураташ 3 воҳид зиёдтар аст. Агар аз сурат ва махраҷи он, мувофиқан, 1 ва 3-ро кам кунем, он гоҳ қасре ҳосил мешавад, ки дар сумма бо қасри матлуб қасри дурусти $\frac{9}{10}$ -ро ташкил медиҳад. Қасрро ёбед». **268.** $x=7$; $y_{\min}=-4$; б) $x=5$; $y_{\max}=6$. **270.** а), д), е). **271.** Муодилаҳои пунктҳои а), б), в) ва г) симметрианд. Муодилаҳои пунктҳои д) ва е) симметрӣ шуда наметавонанд, чунки бо иваз кардани x ва y ифода тағйир меёбад. **272.** а) $\left(\frac{2}{3}; 3\right)$, $\left(-\frac{2}{3}; -3\right)$, $(\pm 1; \pm 2)$; б) (4; 1); в) (2; 1), $(-2; -1)$; г) $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}; \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3}; \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right)$; ғ) $\left(t; -\frac{3}{2}t\right)$; д) (3; 1), (1; 3), $(-1; -3)$, $(-3; -1)$. **273.** а) $(-2; 3)$, $(3; -2)$; б) (1; 4), (4; 1), $\left(\frac{-5+\sqrt{41}}{2}; \frac{-5-\sqrt{41}}{2}\right)$, $\left(\frac{-5-\sqrt{41}}{2}; \frac{-5+\sqrt{41}}{2}\right)$; в) (2; 3), (3; 2); г) (2; 3), (3; 2), $\left(-\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{103}{48}}; -\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{103}{48}}\right)$, $\left(-\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{103}{48}}; -\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{103}{48}}\right)$; ғ) (6; 12), (12; 6); е) (2; 3), (3; 2).

274. в) $(4; 5), (-4; -5)$; г) $(\frac{5}{6}; -\frac{1}{3}), (-\frac{5}{6}; -\frac{1}{3}), (-\frac{1}{2}; 1), (\frac{1}{2}; -1)$; ф) $(2; 4), (4; 2)$; ё) $(3; 12), (12; 3)$; $(\frac{-15 \pm 3\sqrt{41}}{2}; \frac{-15 \pm 3\sqrt{41}}{2})$ 275. Барои $a > 3$ ба $\frac{a}{a+2}$ ва барои ҳамаи $a < -2$ ва $-2 < a < 3$ ба $-\frac{a}{a+2}$ баробар аст. 276. а) $x \leq 0$; б) $x \leq -3$; в) $\forall x \in R$. 277. а) 5; б) 25; в) 42; г) 24; ф) 0,7; д) -0,2. 278. а) Ҳалли ягона дорад, чунки $\frac{2}{-1} \neq \frac{7}{1}$ ё $-2 \neq 7$ аст; б) ҳал надорад, чунки $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ мешавад; в) ҳалли бешумор дорад, чунки $\frac{1}{4} = \frac{-11}{-44} = \frac{3}{12}$ аст. 279. (4; 2) 280. $x \geq 7$. 281. $\frac{2}{3}$ 282. $y_{\max} = 47$ 283. (5; 6), (6; 5). 284. (5; 2). 285. (12; 4). 286. (5; 3), (-5; -3); (-5; 3), (5; -3). 287. (4; 3). 288. 3 см; 4 см; 5 см. 289. 12 см; 5 см. 290. 10 см; 12 см. 291. 10 см; 8 см. 292. 16 см^3 . 293. 4 см; 5 см. 294. 15 см; 10 см; $S = 150 \text{ см}^2$. 295. 10 см. 296. 4 см, 3 см ва 3 см, 4 см. 297. 30 см; 20 см. 298. 15 см; 10 см. 299. 11 см, 7 см. 300. Нишондод. Бо x ва y мувофиқан суръати ҳаракати сайёхро дар роҳи мумфарш ва ноҳамвор ишорат намуда, дар асоси шартӣ масъала системаи муодилаҳои $\frac{3}{x} + \frac{6}{y} = 2, x - y = 2$ -ро тартиб додан мумкин аст. Ҷавоб: 4 км/соат. 301. 5 дастгоҳ. 302. Нишондод. Агар x ва y , мувофиқан, миқдори сафарҳои пешбинишуда ва баъдинаро (яъне сафарҳои бо мошини нав амалӣ гардонидашуда) ифода кунанд, он гоҳ ба вобастагҳои $x - y = 4$ ва $\frac{30}{x} + 2 = \frac{30}{y}$ меосм. Баъди ҳалли система собит мекунем, ки бор бо мошини нав дар 6 сафар кашонда мешавад. 303. Нишондод. Аз рӯи шартӣ масъала системаи муодилаҳои $y - x = 3, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{36}$ -ро тартиб додан мумкин аст. Ҷавоб: 9 соат. 12 соат. 304. 30 соат, 50 соат. 305. Нишондод. Бо x ва y мувофиқан суръати ҳаракати ҷисмҳои якҷум ва дуҷумро ишорат мекунем. Мувофиқи шартӣ масъала $\sqrt{34}$ см дарозии гипотенуза, $10x$ ва $10y$ дарозии катетҳоро ифода мекунад (расми 78). Аз ин системаи $\begin{cases} x^2 + y^2 = 0,34, \\ 3x - 5y = 0 \end{cases}$ -ро ҳосил мекунем, ки ҳаллашон $x = 0,5$ м/сон, $y = 0,3$ м/сон мешавад. 306. 6 км/соат; 7 км/соат. 307. а) $2 - \sqrt{3}$; б) Нишондод. Дар навбати аввал $9 + 4\sqrt{2}$ -ро ба шакли $8 + 4\sqrt{2} + 1 = (2\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 2\sqrt{2} + 1^2 = (2\sqrt{2} + 1)^2$ ва баъд $\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}$ -ро ба намуди $\sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{2} + 1$ овардан зарур аст. Ҷавоб: $\sqrt{2} + 1$. 308. $\sqrt{12}$ ва $\sqrt{17}$. 309. а) 1; б) $53\frac{1}{3}$. 311. 32. 312. 8 см, 13 см. 314. $(1; 1), (-1; -1), (\frac{1}{\sqrt{11}}; \frac{6}{\sqrt{11}}), (-\frac{1}{\sqrt{11}}; -\frac{6}{\sqrt{11}})$.

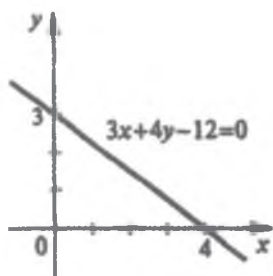


Расми 78

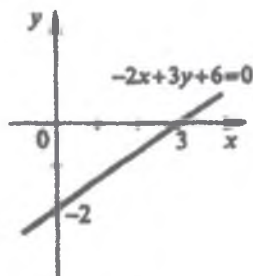


Расми 79

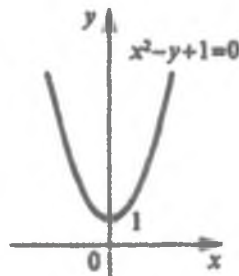
315. а) $x_1=0, x_{2,3}=\pm 2$; б) $x_1=0, x_2=0, 1$; в) $x_1=0, x_{2,3}=\pm 1$ г) $x_{1,2}=\pm 5$; г) $x_{1,2}=\pm 2$; д) $x_1=1$; е) $x_1=1, x_2=-\frac{1}{2}$; ё) $x_1=2, x_2=\frac{7}{4}$. 316. а) $x_1=1, x_{2,3}=2, x_4=3$, б) $x_{1,2}=\pm 1, x_{3,4}=\pm 2, x=-\frac{3}{2}$; в) $x_1=1, x_2=2, x_3=2,5, x_4=5$; г) $x_1=1, x_2=2$. 317. а) $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$; б) $x_1=0, x_2=-1$; в) $x_1=\frac{a}{4b}, x_2=-\frac{a}{2}$; г) $x_{1,2}=\frac{3b\pm 2a}{2}$. 318. а) $\frac{5x-b}{4x+b}$; б) $\frac{4a+1}{3(a+2)}$; в) $\frac{a+13}{a+15}$; г) $\frac{4(x+9)}{3(x-7)}$; ф) $\frac{2x-1}{x-4}$; д) $\frac{b(b-2)}{2b-5}$. 319. а) $\forall p \in (-\infty; +\infty)$; б) $\forall p \in (-\infty; \frac{1}{8})$. 320. а) $\forall q \in (\frac{4}{5}; +\infty)$; б) $\forall p \in (-4\sqrt{3}; 4\sqrt{3})$. 321. а) $m=\pm\sqrt{10}$; б) $m=-\frac{1}{168}$. 322. $x_1=0, x_2=2, x_3=-2$. Графики функцияхои $y=x^3$ ва $y=4x$ дар нуқтаи $(0; 0)$, $(2; 8)$ ва $(-2; -8)$ ҳамдигарро мебуранд. (Расми 79.) 323. а) $x=0$; б) $x_1=2, x_2=-4, x_3=-1$; в) $x_1=1, x_2=-4$; г) $x_1=-1, x_2=-2, x_3=-3, x_4=-4$; ф) $x_1=1, x_{2,3}=\frac{25}{2} \pm \frac{\sqrt{621}}{2}$; д) $x_1=-1, x_2=2$; е) $x_1=0, x_2=1, x_3=3, x_4=4$; ё) $x_1=4, x_2=2, x_3=6, x_4=0$; ж) $x_1=4, x_2=4,75, x_3=5,25, x_4=6$; з) $x_1=-1, x_2=1$; и) $x_1=-4, x_2=2$; к) $x_1=3, x_{2,3}=3\pm 2\sqrt{5}$. 324. а) $x_1=\frac{1}{2}, x_2=2$; б) $x_1=-1, x_2=2$. 326. а) $x_{1,2}=\pm 1, x_{3,4}=\pm \frac{\sqrt{10}}{3}$; б) $x_{1,2}=\pm 1$; в) $x_{1,2}=\pm 2$; г) $x_{1,2}=\pm 1, x_{3,4}=\pm 2$; ф) $x_{1,2}=\pm 2, x_{3,4}=\pm 3$; д) $x_{1,2}=\pm 3, x_{3,4}=\pm 4$; е) $x_{1,2}=\pm 4, x_{3,4}=\pm 5$; ё) $x_{1,2}=\pm 1, x_{3,4}=\pm \frac{1}{2}$; ж) $x_{1,2}=\pm 1, x_{3,4}=\pm \frac{1}{3}$; з) $x_{1,2}=\pm \frac{3}{10}, x_{3,4}=\pm \frac{1}{5}$ и) $x_{1,2}=\pm 4, x_{3,4}=\pm 3$; к) $x_{1,2}=\pm a, x_{3,4}=\pm b$; л) $x_{1,2}=\pm \frac{a}{2}, x_{3,4}=\pm \frac{b}{2}$; м) ҳал надорад; н) $x_{1,2}=\pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$; о) $x_{1,2}=\pm \sqrt{3}$. 327. а) $a \in (0; 18)$; б) $a=18$; в) $a \in (18; +\infty)$. 328. а) не; б) не; в) не; г) ҳа. 329. б) $x=7, y=-3$. 330. а) Расми 80; б) расми 81; в) расми 82; г) расми 83; ф) расми 84; д) расми 85. 331. а) $(0; 0), R=2\sqrt{5}$; б) $(1; 0), R=\sqrt{11}$; в) $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}), R=4$; г) $(1; -1), R=5$. 332. $(\frac{-2+3\sqrt{6}}{5}, \frac{6+\sqrt{6}}{5}), (\frac{-2-3\sqrt{6}}{5}, \frac{6-\sqrt{6}}{5})$; б) $(2; 3)$; в) $(\frac{3}{2}\sqrt{7}, \frac{1}{2}), (-\frac{3}{2}\sqrt{7}, \frac{1}{2})$. 333. а) $(1; 1), (5; 29)$; б) $(1; 4,5), (-\frac{3}{4}; \frac{9}{2})$; в) $(2; 8), (6,4; -5,2)$; г) $(\approx 1,8; \approx \pm 0,8), (1,4; \pm 1,5)$; ф) $(1; 2), (4; \frac{1}{2}), (-\frac{1}{4}; -4)$. 334. а) $(3; -5), (5; -8)$; б) $(-2; 3), (-3; 3,5)$; в) $(-2; -4), (4; 2)$ г) $(\frac{11}{7}; -\frac{1}{7}), (1; 1)$; ф) $(15; -13), (1; 1)$; д) $(\frac{1}{3}; 2\frac{2}{3}), (2; 1)$; е) $(3; -3)$,



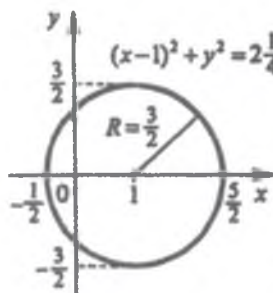
Расми 80



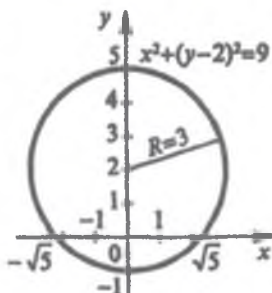
Расми 81



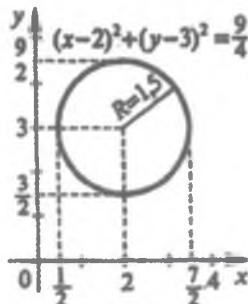
Расми 82



Расми 83



Расми 84



Расми 85

(3; 2), ($\approx -4,666$; $\approx 1,422$), ($\approx -4,666$; $\approx -4,222$): ё) (2; 3), (3; 2), ($\frac{7 \pm \sqrt{89}}{4}$; $\frac{-7 \pm \sqrt{89}}{4}$);
 ж) (± 1 ; ± 2), з) (4; 5), (-6; -5), ($-\frac{9}{2}$; $-\frac{13}{2}$), ($\frac{11}{2}$; $\frac{7}{2}$); и) (± 2 ; ± 3), (± 9 ; $\pm \frac{2}{3}$);
 к) (± 4 ; ± 5). 335. б) (3; 2), (2; 3); (1; -6), (-6; 1); в) (1; 4), (4; 1); г) (3; 3),
 ($-2 \mp \sqrt{15}$; $-2 \pm \sqrt{15}$); ф) (3; 3), ($\frac{-3(1 \pm \sqrt{5})}{4}$; $\frac{-3(1 \mp \sqrt{5})}{4}$); д) (2; 6), (6; 2).
 336. $a = -2$; $b = 2$, $-2x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 61x - 48$ ё) $a = 2$; $b = 8$, $2x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 5x - 12$.
 337. 15; 5. 338. 10 м ва 2 м. 339. 4 м. 340. 10 см; 8 см. 341. $\frac{2}{7}$. 342. Нишон-
 дод. Адади дурақамаи $\overline{x}y$ -ро дар шакли $10x + y$ гиред. Адади матлуб 12 аст.
 343. 35 ва 53. 344. Нишондод. Аз рӯйи шартӣ масъала системаи муодилаҳои $x -$
 $5 = x + y$ ва $(\frac{x}{y})^2 + 4\frac{x}{y} = \frac{57}{16}$ -ро тартиб дода, гузориши $\frac{x}{y} = z$ -ро татбиқ кардан зарур
 аст. 345. 40 км/соат, 50 км/соат. Нишондод. 1 соату 48 дақиқаро дар шакли
 1,8 соат навиштан зарур аст. 346. 50 км/соат, 40 км/соат. Нишондод. Бигузур
 x -суръати ҳаракати қаторай якум ва y -суръати ҳаракати қаторай дуум
 бошад. Масофаи 600 км-ро қаторай якум дар муддати $\frac{600}{x}$ соат ва қаторай

дуом дар муддати $\frac{600}{y}$ соат тай мекунад. Мувофиқи шarti масъала вобастагҳои зеринро ҳосил кардан мумкин аст: $\frac{600}{x} + 3 = \frac{600}{y}$; $\frac{250}{x} = \frac{200}{y}$.
 Онро чун система ҳал карда, натиҷаи матлубро ҳосил кардан мумкин аст. **347.** 35 км/соат, 30 км/соат. *Нишондод.* Дар ҳолати аввала то воҳури велосипедрони якум $10x$ км ва велосипедрони дуом $10y$ км-ро тай мекунад, ки ба вобастагии $10x + 10y = 650$ меорад. Дар ҳолати дуом бошад, велосипедрони якум $8x$ км ва дуом $(8 \text{ соат} + 4 \text{ соату } 20 \text{ дақиқа}) = 12 \text{ соату } 20 \text{ дақиқа} = 12\frac{1}{3} \text{ соат}$ $12\frac{1}{3}y$ км масофаро тай мекунад. Мувофиқи шарт $8x + 12\frac{1}{3}y = 650$ мешавад. Системаи муодилаҳои ҳосилшударо ҳал кардан зарур аст. **348.** 9 см ва 10 см. **349.** 3 м ва 4 м. **350.** *Нишондод.* Бигзор, адади дурақамаи матлуб $\overline{ab}$ бошад, он гоҳ мувофиқи шarti масъала $\begin{cases} \overline{ab} = 4(a + b) + 3, \\ \overline{ab} + 18 = \overline{ba} - 18 \end{cases}$ -ро ҳосил мекунем. Агар ба ҷойи $\overline{ab}$ ва $\overline{ba}$, мувофиқан, $10a + b$ ва $10b + a$ гирем, он гоҳ баъди баъзе табдилҳо системаи ду муодилаи хаттии $\begin{cases} 2a - b = 1, \\ a - b = -4 \end{cases}$ пайдо мешавад. Ҷавоб: 59. **351.** Агар касрро дар шакли $\frac{x}{y}$ гирем, он гоҳ вобастагҳои $\frac{x+2}{y} = 1$ ва $\frac{x}{y+3} = \frac{1}{2}$ -ро ҳосил мекунем ($y \neq 0$, $y \neq -3$). Барои ёфтани касри матлуб системаи $\begin{cases} x + 2 = y, \\ 2x = y + 3 \end{cases}$ -ро ҳал кардан зарур аст. Ҷавоб: $\frac{5}{7}$. **352.** 50 ва 45. *Нишондод.* Агар яке аз ададҳоро бо x ва дигарашро бо y (яъне $y = 10a + 5$) ишорат кунем, он гоҳ барои ёфтани ададҳои матлуб системаи $\begin{cases} x \cdot (10a + 5) = 2250, \\ x \cdot (10a + b) = 2300 \end{cases}$ -ро ҳосил мекунем. **353.** 5 км/соат, 3 км/соат. **354.** Агар адади матлуби дурақамаро дар намуди $\overline{ab} = 10a + b$ гирем, он гоҳ шarti масъала ба системаи $\begin{cases} a = 2b, \\ (10a + b)(a + b) = 252 \end{cases}$ меорад. Ҷавоб: 42. **355.** *Нишондод.* Мувофиқи шарт $x + 5 = a^2$, $x - 11 = b^2$ мешавад. Аз ин ҷо, $a^2 - b^2 = (a - b) = 16$ шуда, ду ҳолат ба миён меояд: 1) $a + b = 8$, $a - b = 2$, $a = 5$, $b = 3$, $x = 20$; 2) $a + b = 16$, $a - b = 1$, $a = \frac{17}{2}$, $b = \frac{15}{2}$, $x = 67\frac{1}{4}$. Ҷавоб: 20 ва ё $67\frac{1}{4}$.

Боби III ПРОГРЕССИЯҲО

§7. Прогрессияи арифметикӣ

§8. Прогрессияи геометрӣ

§9. Баъзе хосиятҳои дигари прогрессияҳо.

Ҳалли масъалаҳои ҳар ду намуни прогрессияҳоро дарбаргиранда

§7. ПРОГРЕССИЯИ АРИФМЕТИКӢ

21. Пайдарпайҳои ададӣ ва тарзи дода шудани онҳо.

Пеш аз он, ки мафҳуми пайдарпайҳоро дохил кунем, ба мисол мурочиат мекунем. Агар адади токи маҷмӯи ададҳои натуралиро бо тартиби афзуншавиашон пай дар пай нависем, он гоҳ қатори ададҳои

1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21;...

-ро ҳосил мекунем, ки онро пайдарпайии ададҳои бутуни мусбатӣ тоқ ё мухтасар пайдарпайӣ меноманд. Мушоҳидаи бевосита нишон медиҳад, ки адади ҳафт дар қойи чорум, адади 13 дар қойи ҳафتم ва адади 105 дар қойи панҷоҳу сеюми пайдарпайии дар боло навишташуда қойгир аст. Ҳамин тариқ, барои адади натуралии дилхоҳи n адади токи ба он мувофиқ ба $2n-1$ баробар аст, ки инро мо ҳанӯз дар синфи 6 муқаррар карда будем.

Акнун, касрҳои дурусти сураташон ба 2 баробари

$$\frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \frac{2}{7}, \frac{2}{8}, \frac{2}{9}, \dots$$

-ро муоина мекунем. Мебинем, ки барои ҳар гуна адади натуралии n чунин каср ба касри $\frac{2}{n+2}$ баробар аст.

Ҳамин тариқ, $\frac{2}{8}$ дар қойи шашум, $\frac{2}{33}$ дар қойи сиву якум ва $\frac{2}{102}$ дар қойи садуми пайдарпайӣ меистад.

Ададҳои пайдарпайиро ташкилдиханда аз рӯи тартиби қойгиршавиашон, мувофиқан, аъзои якум, дуюм ва ғайраи пайдарпайӣ номида мешаванд.

Масалан, аъзои якум ва панҷуми пайдарпайии ададҳои тоқ ба 1 ва 9, пайдарпайии касрҳои дурусти сураташон 2, мувофиқан, ба $\frac{2}{3}$ ва $\frac{2}{7}$ баробар аст. Дар шакли умумӣ аъзои пайдарпайиро бо ҳарфҳои

индексдори $a_1, a_2, a_3, \dots$ ишорат карда, онхоро, мувофиқан, « a -и якум, a -и дуум, a -и сеюм, ... меҳонанд. Бо ибораи дигар, индексҳо рақами тартибии ҷойгиршавии аъзоро дар пайдарпайӣ ифода мекунанд. Дар ин ҳолат аъзои пайдарпайи рақамаш n -ро (яъне аъзои n -уми пайдарпайиро) бо a_n ва ҳуди пайдарпайиро бо рамзи (a_n) ишорат мекунанд.

Аз гуфтаҳои боло бармеояд, ки дар байни пайдарпайиҳои ададӣ ва маҷмӯи ададҳои натуралӣ вобастагии функционалӣ вучуд дорад.

Т а ъ р и ф. Функцияе, ки соҳаи муайяниаш маҷмӯи ададҳои натуралӣ аст, пайдарпайии ададӣ ном дорад.

Агар ин функция маълум бошад, он гоҳ таъриф имконият медиҳад, ки пайдарпайиро бо ёрии формулаи n -умаш ифода кунем: $a_n = f(n)^{*.3}$

Ҳамин тариқ, пайдарпайии ададҳои тоқ бо формулаи $a_n = 2n - 1$ ва пайдарпайии касрҳои дурусти сураташон 2 бо формулаи $a_n = \frac{2}{n+2}$ ифода карда мешавад.

Пайдарпайиҳои дар боло овардашуда пайдарпайиҳои беохирӣ ададӣ буданд, чунки миқдори аъзои онҳо беохир аст. Дар ҳолати охирнок будани шумораи аъзои пайдарпайӣ онро пайдарпайии охирнок меноманд. Масалан, пайдарпайии

$$1, 2, 3, 4, 5 \dots 98, 99, 100$$

охирнок буда, сад аъзоро дарбар мегирад. Акнун якчанд мисоли диққатҷалбкунандаро дида мебароем.

М и с о л и 1. Аз рӯи формулаи аъзои n -уми $a_n = 1 - 2n^2$ аъзоҳои пайдарпайиро барқарор мекунем.

Бо ин мақсад ба ҷойи n ададҳои натуралии 1, 2, 3, 4, 5 ва ғайра-ро гузошта,

$$a_1 = -1, a_2 = -7, a_3 = -17, a_4 = -31, a_5 = -49, \dots$$

ҳосил мекунем. Аз ин ҷо, аъзоҳои аввалини пайдарпайии матлуб $-1; -7; -17; -31; -49; \dots$

мешаванд.

М и с о л и 2. Пайдарпайӣ бо формулаи $a_n = (-1)^n$ дода шуда аст, Амалиёти дар мисоли 1 гузаронидаамонро такрор намуда,

$$a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = 1, a_5 = -1, \dots$$

-ро ҳосил мекунем, ки аъзоҳояш фақат аз ду адади пай дар пай такроршавандаи -1 ва 1 иборат аст (аъзоҳои рақамашон тоқ ба -1 ва аъзоҳои рақамашон ҷуфт ба 1 баробаранд). Пайдарпайӣ намуди

* $a_n = f(n)$ -ро ин ҳел ҳам маънидод мекунанд: пайдарпайии ададҳои беохирӣ (a_n) чун функция дар маҷмӯи ададҳои натуралӣ муайян мебошад.

$$-1; 1; -1; 1; (-1)^n; \dots$$

дорад. Ин гуна пайдарпайихо, ки аз ду адади аломаташон муқобили қимати мутлақашон якхела ва пайҳамомада иборатанд, **пайдарпайии алвончхӯранда** номида мешаванд. Намуди умумии ин гуна пайдарпайихоро бо формулаи

$$a_n = (-1)^n k$$

ки дар он k - адади ҳақиқии дилхоҳ аст, ифода мекунанд. Масалан, агар ба чойи k ададҳои 5 ва $\sqrt{2}$ -ро гирем, он гоҳ пайдарпайихои

$$-5; 5; -5; 5; -5; \dots$$

$$-\sqrt{2}; \sqrt{2} \quad -\sqrt{2} \quad \sqrt{2} \quad -\sqrt{2} \dots$$

-ро ҳосил мекунем.

Мисоли 3. Пайдарпайиеро дида мебароем, ки ҳамаи аъзоҳояш ҳамон як адади дилхоҳи c мебошад:

$$c; c; c; c; c; c; \dots$$

Маълум аст, ки он бо ёрии формулаи $a_n = c$ муайян мегардад. Дар оянда ин гуна пайдарпайихоро **пайдарпайихои статсионарӣ** (аз калимаи латинии *statsionaris* - *беҳаракат*) меноманд.

Дар боло мо бо тарзи ошкор дода шудани пайдарпайии (a_n) -ро муоина намудем. Акнун, тарзи дигари дода шудани пайдарпайиро, ки **рекуррентӣ** (аз калимаи латинии *recurre* - *баргаштан*) ном дорад, дида мебароем.

Аз мисолҳо сар мекунем.

Мисоли 4. Пайдарпайии (a_n) , ки дар ин ҷо $a_1 = 1$ ва $a_n = 2a_{n-1} - 1$ аст, менависем.

Мувофиқи додашудаҳо $a_2 = 2a_1 - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, $a_3 = 2a_2 - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$.

Айнан ҳамин тавр нишон додан мумкин аст, ки барои ҳар гуна адади натуралии n $a_n = 1$ аст, яъне пайдарпайии статсионарии

$$1; 1; 1; 1; 1; \dots 1; \dots$$

пайдарпайии матлуб аст.

Мисоли 5. Аъзои якум ва дуҷуми пайдарпайӣ ба 1 ва ҳар як аъзои пасояндаш ба суммаи ду аъзои пешоянда баробар аст. Аъзоҳои ин пайдарпайиро меёбем.

Аз шарт зоҳиран фаҳмост, ки аъзоҳои пайдарпайӣ барои ҳар гуна n -и натуралӣ формулаи $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ -ро қаноат менамоянд. Аз рӯйи ин формула $a_3 = a_1 + a_2 = 2$, $a_4 = a_2 + a_3 = 3$, $a_5 = a_3 + a_4 = 5$, $a_6 = a_4 + a_5 = 8$, $a_7 = a_5 + a_6 = 13$, $a_8 = a_6 + a_7 = 21$, ... -ро ҳосил мекунем.

Пайдарпайии ҳосилшудаи

$$1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; \dots$$

-ро ададҳои Фибоначчи (тахаллуси математики итолиёӣ Леонард Пизанский (1170-1250)) меноманд.

Мисоли 6. Аъзoi якуми пайдарпайии (a_n) ба 1 баробар аст. Хар як аъзoi пасоянд ба сечандаи кубии аъзoi пешоянд баробар аст. Аъзоҳои ин пайдарпайиро меёбем.

Мувофики шартҳои додашуда $a_1=1$, $a_{n+1}=3a_n^3$ аст. Ин формулаҳо имконият медиҳанд, ки аз рӯи аъзoi якуми маълуми он $a_2 = 3 \cdot a_1^3 = 3$ -ро, баъд аз рӯи a_2 аъзoi сеюм $a_3 = 3a_2^3 = 81$ ва ғайраҳоро ҳисоб кунем. Ин ба пайдарпайии

1; 3; 81; 1594 323; ...

меоварад.

Формулае, ки аъзoi дилхоҳи пайдарпайиро аз ягон аъзoi саркарда, ба воситаи як ё якчанд аъзoi пешоянд ифода мекунад, формулаи **рекуррентӣ** меноманд. Формулаҳои дар мисолҳои 5 ва 6 навиштамон рекуррентианд.

Мисоли 7. Агар (a_n) пайдарпайии ададҳои натуралии ба 7 каратӣ бошад, он гоҳ

а) чор аъзoi аввалааш;

б) аъзoi панҷоҳу дуюм ва $3p$ -умаш -ро меёбем.

Аз рӯи шартӣ маълум аст, ки $a_n=7n$ мешавад.

а) Дар формулаи $a_n=7n$ ба ҷойи n ададҳои 1, 2, 3 ва 4-ро гузошта, чор аъзoi аввали матлуби пайдарпайиро меёбем:

$a_1=7 \cdot 1=7$, $a_2=7 \cdot 2=14$, $a_3=7 \cdot 3=21$, $a_4=7 \cdot 4=28$;

б) Тарзи болоии амалиётро такрор карда, a_{52} ва a_{3p} -ро дар намуди зерин ёфтан мумкин аст:

$a_{52}=7 \cdot 52=364$, $a_{3p}=7 \cdot 3p=21p$.

Мисоли 8. Формулаи аъзoi n -умро барои пайдарпайии

2; 5; 10; 17; 26; ...

тартиб медиҳем.

Аъзоҳои пайдарпайиро дар шакли зерин менависем: $a_1=2=1^2+1$;
 $a_2=5=2^2+1$; $a_3=3^2+1$; $a_4=4^2+1$; $a_5=5^2+1$; $a_6=6^2+1$;...

Мушоҳидаи бевоситаи навиштаҳои болоӣ нишон медиҳанд, ки аъзoi n -уми ин пайдарпайӣ бо формулаи $a_n=n^2+1$ ифода мешавад.

?

1. Пайдарпайии ададиро таъриф диҳед. **2.** Дар кадом ҳолат барои (a_n) формулаи $a_n=f(n)$, ки a_n аъзoi n -уми пайдарпайӣ аст, дуруст мебошад? **3.** Оё маҷмӯи ададҳои ҷуфт ва касрҳои мусбати дурусти сураташон ба 1 баробар пайдарпайии ададиро ташкил медиҳанд? **4.** Чӣ тавр аз рӯи аъзoi n -уми пайдарпайӣ, ки бо формулаи $a_n=f(n)$ ифода мешавад, пайдарпайиро тартиб додан мумкин аст? Мисол оред. **5.** Мисолҳои пайдарпайиҳои статсионарӣ ва рекуррентиро оред.

6. Пайдарпайиҳои беохир ва охирноқро шарҳ дода, мисол оред.

356. Аъзоҳои номаълуми пайдарпайии

а) 2; 4; ?; 8; 10; ?; ?; 16; б) 144; ?; 36; 18; ?; ?; ? $\frac{9}{8}$ -ро ёбед

357. Пайдарпайии ададии (a_n) .

1; 3; 9; 27; 81; 243; 729; 2187; 6561; 19683; 59049 аст. Аъзоҳое, ки дар байни

а) a_1 ва a_4 б) a_3 ва a_6 . в) a_5 ва a_9 г) a_9 ва a_{11}

ҷойгиранд, ёбед.

358. Агар (b_n) пайдарпайии ададҳои натуралии ба 4 каратӣ бошад, он гоҳ

а) шаш аъзои аввалааш;

б) аъзои нухум ва садум якумаш;

в) аъзои $2k$ -умаш

-ро ёбед.

359. (c_n) пайдарпайиест, ки дар он ҳамаи аъзоҳои индекси тоқ ба 2 ва аъзоҳои индекси ҷуфт ба -1 баробар аст.

а) Панҷ аъзои аввалаашро нависед;

б) аъзоҳои $c_7, c_{12}, c_{21}, c_{103}, c_{204}, c_{2k}$ -ро, ки $k \in \mathbb{N}$ аст, ёбед.

360. (x_n) пайдарпайии аъзоҳояш дучандаи квадрати ададҳои натуралӣ аст.

а) ҳашт аъзои аввалаашро нависед;

б) аъзоҳои x_{18}, x_{23}, x_{41} ва x_{2n} -ро ёбед.

361. Формулаи аъзои n -умро барои пайдарпай тартиб диҳед:

а) 1; 2; 3; 4; 5;

б) $2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \frac{6}{5}; \dots$

в) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$

г) $\frac{1}{1 \cdot 2}; \frac{1}{2 \cdot 3}; \frac{1}{3 \cdot 4}; \frac{1}{4 \cdot 5}; \dots$

362. Аз рӯи аъзоҳои додашудаи пайдарпайии

а) $\frac{2}{3}; \frac{4}{5}; \frac{6}{7}; \frac{8}{9}; \frac{10}{11}; \dots$ б) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}; \dots$

формулаи аъзои n -умашро тартиб диҳед.

363. Пайдарпайии ададиро тартиб диҳед, агар:

а) $a_n = 0,5n + 2, 1 \leq n \leq 6;$ г) $a_n = (-1)^n \cdot 12, 1 \leq n \leq 10;$

б) $a_n = -n^2 + 1, 1 \leq n \leq 3;$ г) $a_n = n^2 + 2n, 1 \leq n \leq 4;$

в) $a_n = 4, 1 \leq n \leq 5$ д) $a_n = n^2 - 4n + 3, 1 \leq n \leq 5;$

бошад

364. Ҳафт аъзои аввали пайдарпайиро, ки бо формулаи:

а) $x_n = 2n^2 - 1;$ г) $x_n = 2n - 5;$ е) $x_n = 3n^2 + 1;$

б) $x_n = 3n + 2;$ г) $x_n = \frac{2n}{n+1};$ ё) $x_n = (-1)^n \cdot 3;$

в) $x_n = \frac{2n-1}{n+1};$ д) $x_n = 3 \cdot 2^{n-3};$ ж) $x_n = 0,5 \cdot 4^{n+1};$

дода шудааст, ёбед.

365. Пайдарпайии (b_n) бо формулаи $b_n = n^3 + 2n$ дода шудааст. Аъзоҳои b_4 , b_{13} ва b_{61} , -и онро ёбед.
366. Аъзоҳои дуҷум, сеҷум, чорум, панҷум ва шашуми пайдарпайии (c_n) -ро ҳисоб кунед: агар:
- а) $c_1 = 12$ ва ҳар як аъзои пасоянда аз аъзои пешоянда 8 воҳид калон бошад (яъне $c_{n+1} = c_n + 8$);
- б) $c_1 = 400$ ва ҳар як аъзои пасоянда аз пешоянда 4 маротиба хурд бошад (яъне $c_{n+1} = c_n : 4$).
367. Агар:
- а) $a_1 = 19$, $a_{n+1} = a_n + 1$; ғ) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n + 3$;
 б) $a_1 = 1000$, $a_{n+1} = 0,01a_n$; д) $a_1 = 9$, $a_{n+1} = 3a_n + 7$;
 в) $a_1 = 160$, $a_{n+1} = -0,5a_n$; е) $a_1 = 10$, $a_{n+1} = \frac{3}{a_n}$
 г) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n^{-1}$; ё) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^{3-1}$
 бошад, шаш аъзои аввалаи пайдарпайии (b_n) -ро нависед.
368. Агар:
- а) $b_1 = 15$, $b_{n+1} = b_n + 5$; в) $b_1 = 4$, $b_{n+1} = 2b_n - 3$;
 б) $b_1 = 25$, $b_{n+1} = 5b_n - 3$; г) $b_1 = 6$, $b_{n+1} = 2b_n^{-1}$;
 бошад, панҷ аъзои аввалаи пайдарпайии (b_n) -ро нависед.
369. Аъзои якуми пайдарпайии (x_n) ба 3 баробар буда, ҳар як аъзои пасояндаш ба куби аъзои пешинааш баробар аст ($x_1 = 3$; $x_{n+1} = x_n^3$). Се аъзои аввалаи пайдарпайиро ёбед.
370. Бигзор $y_1 = 1$, $y_{n+1} = 0,5y_n$ бошад. Пайдарпайии (y_n) -ро тартиб диҳед.
371. Аъзои пайдарпайии (a_n) -ро аз рӯи формулаи $a_n = (-1)^n \cdot 7$ ёбед.

Машиқҳо барои такрор

372. Ифодаҳои зеринро сода кунед:

а) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{4\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}$; г) $\sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}$.

373. Ҳисоб кунед:

а) $(2^2)^3$; в) $-(-2^2)^3$ г) $(4^2 - 5^2)^2$
 б) $(-2)^5 \cdot 3$; г) $(4^2 - 3^2)^3$; д) $(3^3 - 2^3)^2$

374. Муодилаи $x^2 - 5x + 6 = 0$ -ро ҳал накарда,

а) $x_1 + x_2$; б) $x_1 \cdot x_2$; в) $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2$
 -ро ҳисоб кунед.

375. Муодиларо ҳал кунед:

а) $\frac{4}{x+3} + 1 = \frac{1}{x-3} + \frac{5}{3-1}$; б) $\frac{3}{x+1} - \frac{4}{1-x} = \frac{5-x}{x^2-1}$

376. Қайки мотордор дар 4 соат 44 км ба муқобили чараёни дарё ва 56 км ба равиши чараён шино кард. Агар суръати чараёни дарё ба 3 км/соат баробар бошад, суръати қайкро дар оби ором ёбед?

377. Системаро кал кунед:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x + y = 3, \\ 7x - y = -23; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2,1x + 1,3y = 6, \\ y - x = 2. \end{cases}$$

378. Функция бо формулаи $f(x) = \frac{x^2-7}{x+1}$ дода шудааст. Ёбед:

$$\text{а) } f(1); \quad \text{б) } f(-1); \quad \text{в) } f(0)? \quad \text{г) } f(1,1); \quad \text{д) } f(-0,5).$$

379. Масъалаи Магнитскийро аз китоби «Арифметика»-аш ҳал кунед: Агар квадрати ададро ба 108 ҷамъ кунем, он гоҳ ададе ҳосил мешавад, ки аз ҳуди адади матлуб 24 маротиба зиёд аст. Ададро ёбед.

22. Таърифи прогрессияи арифметикӣ

Дар пункти 21 ба мафҳуми пайдарпайӣ хеле хуб шинос шудем.

Пайдарпайиҳои

$$(a_n) \quad 1; 6; 11; 16; 21; \dots$$

$$(d_n) \quad 2; 2,1; 2,2; 2,3; 2,4; \dots$$

$$(c_n) \quad -1; -5; -9; -13; -17; \dots$$

-ро, ки бо баъзе ҳосиятҳоишон диққатҷалбкунандаанд, дида мебароем. Масалан, пайдарпайи (a_n) пайдарпайи ададҳои натуралиеро ифода мекунад, ки аз аъзои дуум сар карда, ҳангоми ба 5 тақсим кардан, 1 бақия мемонад. Аз тарафи дигар, ҳар як аъзои ин пайдарпайӣ, аз аъзои дуум сар карда, дар натиҷаи ба аъзои пешоянда ҷамъ кардани ҳамагон як адади $d=5$ ҳосил мешавад. Ногуфта намонад, ки хусусияти охириин барои пайдарпайиҳои дуум ва сеюм (яъне (b_n) ва (c_n)) чой дошта, барояшон адади дар боло номбаршуда, мувофиқан, $d=0,1$ ва $d=-4$ мебошад. Хулоса, хусусияти фарқкунандаи ин пайдарпайиҳо дар он аст, ки барои n -и дилхоҳ аъзои онҳо баробарии $a_{n+1}=a_n+d$ -ро қаноат менамоянд. Дар ҳақиқат, барои пайдарпайиҳои интиҳобкардаамон, мувофиқан, $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+5$, $b_1=2$, $b_{n+1}=b_n+0,1$ ва $c_1=-1$, $c_{n+1}=c_n-4$ мебошанд. Ин пайдарпайиҳо мисоли прогрессияи арифметикӣ мебошанд.

Таърифи пайдарпайие, ки ҳар як аъзояш, аз аъзои дуум сар карда, дар натиҷаи ба аъзои пешоянда ҷамъ кардани ҳамагон як адад ҳосил мешавад, прогрессияи арифметикӣ* номида мешавад.

Ба ибораи дигар, иҷрои шарт $a_{n+1}=a_n+d$ шаҳодат медиҳад, ки пайдарпайи (a_n) прогрессияи арифметикӣ мебошад. Аз баробарии охириин баробарии

$$a_{n+1}-a_n=d$$

-ро навиштан мумкин аст (он аз ҳуди таъриф ҳам бармеояд), ки маънои зеринро дорад: аз аъзои дуум сар карда, фарқи байни аъзои дилхоҳи прогрессияи арифметикӣ аз аъзои пешояндааш ба

* Прогрессия аз калимаи латини progressio гирифта шуда, маънояш «ҳаракат ба пеш» аст.

адади доимии d баробар аст. Адади d -ро фарқи прогрессияи арифметикӣ меноманд.

Аз муҳокимарониҳои болоӣ бармеояд, ки барои тартиб додани прогрессияи арифметикӣ доништани аъзои якум ва фарқи он кифоя аст.

Масалан, агар $a_1=2$ ва $d=3$ бошад, он гоҳ мувофиқи формулаи $a_{n+1}=a_n+d$ пайдарпайии

$$2; 5; 8; 11; 14; \dots$$

-ро ҳосил мекунем, ки он прогрессияи арифметикӣ аст.

Айнан ҳамин ҳел ҳангоми $a_1=5$ ва $d=-3$ будан, прогрессияи арифметикии

$$5; 2; -1; -4; -7; -10; \dots$$

ҳосил мешавад. Агар $a_1=1$ ва а) $d=1$, б) $d=2$ бошад, он гоҳ, мувофиқан, пайдарпайиҳои

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

ва

$$1, 3, 5, 7, 9, \dots$$

-ро ҳосил мекунем. Яъне ададҳои натуралӣ ва ададҳои тоқи мусбатӣ бутун прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳанд.

Пайдарпайии статсионарии

$$5, 5, 5, 5, \dots$$

низи прогрессияи арифметикиро бо аъзои $a_n=5$ ва фарқи $d=0$ ифода мекунанд.

Пайдарпайиҳои

$$1, 3, 5, 6, 8, 10, 12, \dots$$

ва

$$2, 5, 8, 10, 13, 15, 18, \dots$$

прогрессияи арифметикӣ нестанд, чунки барои якумаш $a_3-a_2=5-3=2$, $a_4-a_3=6-5=1$ ва барои дуюмаш $a_3-a_2=8-5=3$, $a_4-a_3=10-8=2$.

Қайд мекунем, ки агар фарқи прогрессия мусбат бошад, он гоҳ онро афзуншаванда ва агар манфӣ бошад, камшаванда меноманд.

Масалан, прогрессияи

$$2, 5, 8, 11, 14, \dots$$

афзуншаванда буда, прогрессияи

$$4, 2, 0, -2, -4, -6, \dots$$

камшаванда аст.

Дар охир таъкид менамоем, ки прогрессияҳои охирнок ва беохир ба монанди пайдарпайиҳои охирнок ва беохир (ниг. ба п. 21) маънидод карда мешаванд. Ин тасдиқот табиатан дуруст аст, чунки чӣ хеле ки дар боло гуфта будем, прогрессияҳо як намуди махсуси пайдарпайиҳои ададианд.

Аъзоҳои аввалин ва охиринаи прогрессияи охиринокро аъзоҳои канорӣ меноманд. Масалан, дар прогрессияи арифметикии
 $9; 16; 23; 30; 37;$

аъзоҳои 9 ва 37 канорианд.

?

1. Таърифи прогрессияи арифметикиро баён карда, мисол оред.

2. Фарқи прогрессия чиро мегӯянд? 3. Аз рӯи аъзоҳои якум ва фарқи прогрессияи арифметикӣ онро чӣ тавр тартиб додан мумкин аст? Мисол оред.

380. Оё пайдарпайи прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳад:

а) $1; 4; 10; 11; 14; 17; \dots$

в) $3; 3; 3; 3; 3; 3; \dots$

б) $-2; -4; -6; -8; -10; -12; \dots$

г) $\frac{1}{3}; \frac{2}{4}; \frac{3}{5}; \frac{4}{6}; \frac{5}{7}; \frac{6}{8}; \dots?$

381. Аз рӯи аъзои якум ва фарқи прогрессияи арифметикиро тартиб диҳед:

а) $a_1 = 2, d=1;$

г) $a_1 = 2,1, d=0,2;$

ж) $a_1 = 3, d=0,5;$

б) $a_1 = \frac{1}{2}, d=1;$

д) $a_1 = -1, d=0;$

з) $a_1 = 1, d=9;$

в) $a_1 = -7, d=3;$

е) $a_1 = 0,51, d=0,09;$

г) $a_1 = 5, d=2;$

ё) $a_1 = 2,1, d=-0,1;$

382. Фарқи прогрессия d -ро ёбед, агар прогрессияи арифметикӣ намуди:

а) $2; 4; 6; 8; \dots$

д) $-10; -19; -28; -37; \dots$

б) $\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{7}{3}; \frac{10}{3}; \dots$

е) $8; 15; 22; 29; \dots$

в) $-1; -2; -3; -4; \dots$

ё) $\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \dots$

г) $1; 5; 9; 13; \dots$

ж) $-9; -7; -5; -3; \dots$

г) $-10; 0; 10; 20; \dots$

з) $13; 19; 25; 31; \dots$

дошга бошад.

Маиқҳо барои такрор

383. Аз пункти A ба пункти B автомобили боркаш ва баъди 1 соат аз пункти A ба B автомобили сабукрав ба роҳ баромад. Ба пункти B автомобилҳо дар як вақт омада расиданд. Агар автомобилҳо аз пунктҳои A ва B дар як вақт ба пешвози якдигар ба роҳ мебаромаданд, он гоҳ баъди 1 соату 12 дақиқаи ҳаракат вохӯрданд. Автомобили боркаш масофаи пунктҳои A ва B ро дар чанд соат тай кардааст?

384. Амалро иҷро кунед:

а) $\frac{\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x}+x\sqrt{x}} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}};$ б) $\frac{x^2+x+1}{x^3-1} : \frac{x}{1-x} + \frac{x^2+x+1}{x}.$

385. Муодиларо ҳал кунед:
 а) $|x|+x^3=0$; б) $(2x-1)(|x|+1)=3$.
386. Исбот кунед, ки $3^{2n+2}-8n-9$ ба 64 бебақия тақсим мешавад.
387. Тарафҳои росткунҷаи масоҳаташ ба a см² ва кунҷи тези байни диагональҳо ба 60° баробарро ёбед.
388. Кадоме аз нуқтаҳои $A(-1; 1)$, $B(2; -3)$, $C(3; 3)$, $D(-2, 1; 1, 2)$, $E\left(\frac{3}{2}; 0\right)$, $F\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$ ба графики функсияи $y=2|x|-3$ тааллуқ дорад?
389. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:
 а) $f(x) = \frac{2x}{4-x}$; б) $f(x) = \frac{8}{x^2+4}$.
390. Аз рӯйи аъзоҳои додашудаи пайдарпайии
 а) $\frac{3}{2}; \frac{6}{3}; \frac{9}{4}; \frac{12}{5}; \frac{15}{6}; \dots$ б) $-6; 6; -6; 6; -6; \dots$
 формулаи аъзои n -умашро тартиб диҳед.

23. Формулаи аъзои n -уми прогрессияи арифметикӣ

Чӣ тавре, ки дар пункти 22 дидем, аъзои якум ва фарқи прогрессияи арифметикиро дониста, пай дар пай (яъне аввал аъзои дуюм, баъд аъзои сеюм ва ҳоказо) аъзои дилхоҳи онро ёфтани мумкин аст. Аммо барои ёфтани аъзои рақами тартибииш ба қадри имкон калони прогрессия ин тарз муфид набуда, ба ғайр аз ҳисобу китоби зиёд вақти тӯлониро талаб менамояд. Бо мақсади ёфтани тарзе, ки вақти каму ҳисоби кӯтоҳро талаб мекунад, боз як тарзи таърифи прогрессия мурочиат мекунем. Дар асоси он

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d, \\ a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d, \\ a_5 &= a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d \end{aligned}$$

ва ғайра. Аз таҳлили қонуни тағйирёбӣ маълум мегардад, ки коэффитсиентҳои назди d -и ифодаҳои ҳосилшуда аз индекси аъзои мувофиқи прогрессия як воҳид кам аст:

$$a_2 = a_1 + 1 \cdot d, a_3 = a_1 + 2 \cdot d, a_4 = a_1 + 3 \cdot d, a_5 = a_1 + 4 \cdot d.$$

Аз ин рӯ, барои ёфтани a_n ба a_1 ифодаи $(n-1) \cdot d$ -ро ҷамъ кардан кофист, яъне

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

мешавад.

Формулаи охирин ба ёфтани аъзои n -уми (дилхоҳи) прогрессияи арифметикӣ имконият медиҳад. Истифодаи онро дар ҳалли мисолҳои мушаххас меорем.

Мисоли 1. Пайдарпайии (a_n) прогрессияи арифметикӣ буда, дар он $a_1=0,32$ ва $d=0,22$ аст. Аъзои бисту сеюми онро меёбем:

$$a_{23} = a_1 + (23-1)d = 0,32 + 22 \cdot 0,22 = 0,32 + 4,84 = 5,16.$$

Ҷ а в о б: $a_{23}=5,16$.

М и с о л и 2. Муайян мекунем, ки адади 108 аъзои прогрессияи арифметикии (x_n) :

$$18; 13,8; 9,6; 5,4; 1,2; -3; \dots$$

ҳаст ё на.

Бо ин мақсад аз рӯйи аъзоҳои прогрессияи додашуда d -ро меёбем: $d = x_2 - x_1 = 13,8 - 18 = -4,2$. Формулаи аъзои n -уми прогрессияи арифметикии (x_n) -ро тартиб медиҳем:

$$x_n = 18 + (n-1)(-4,2) \text{ ё } x_n = 22,2 - 4,2n.$$

Агар чунин адади натуралии n мавҷуд бошад, ки қимати ифодаи $22,2 - 4,2n$ ба -108 баробар шавад, он гоҳ ин адад аъзои прогрессияи арифметикии (x_n) мешавад. Барои муайян кардани ин, муодилаи

$$22,2 - 4,2n = -108$$

-ро ҳал мекунем:

$$4,2n = 108 + 22,2, \quad 4,2n = 130,2, \quad n = 31.$$

Ҳамин тариқ, адади -108 аъзои сию якуми прогрессияи арифметикии додашуда будааст.

Формулаи аъзои дилхоҳи прогрессияи арифметикӣ имконият медиҳад, ки аз рӯйи ягон аъзо (яъне a_i) ва фарқаш (d) ё аз рӯйи ду аъзо (a_s ва a_k) ҳар гуна аъзои дигари (яъне a_l ки $l \neq k, s$) он ёфта шавад.

М и с о л и 3. Агар $a_{20} = 214$ ва $d = 0,7$ бошад, a_1 -ро меёбем.

Формулаи аъзои n -уми прогрессияи арифметикиро истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$a_{20} = a_1 + (n-1)d; \quad a_1 = a_{20} - 19 \cdot d = 214 - 19 \cdot 0,7 = 214 - 13,3 = 200,7.$$

Аз ин ҷо, $a_1 = 200,7$. Ҳамин тариқ, прогрессия бо аъзои якуми ба 200,7 баробар сар мешавад.

М и с о л и 4. Агар $a_6 = 32$ ва $a_{19} = 123$ бошад, аъзои якум ва фарқи прогрессияи (a_n) -ро меёбем. Дар асоси додашудаҳо системаи муодилаҳои дуномаълумай

$$\begin{cases} a_6 = 32, \\ a_{19} = 123 \end{cases} \quad \text{ё} \quad \begin{cases} a_1 + 5d = 32, \\ a_1 + 18d = 123 \end{cases}$$

-ро ҳосил мекунем. Онро бо тарзи чамъкунии алгебравӣ ҳал мекунем:

$$\begin{cases} a_1 + 18d = 123, \\ -a_1 - 5d = -32; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + 18d = 123, \\ 13d = 91; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 123 - 18 \cdot 7, \\ d = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = -3, \\ d = 7. \end{cases}$$

Инак, аъзои якуми прогрессия ба -3 ва фарқаш ба 7 баробар аст.

М и с о л и 5. Агар $a_5 = 72$ ва $a_{11} = 138$ бошад, аъзои понздаҳуми прогрессияи (a_n) -ро меёбем. Дар навбати аввал аз рӯйи схемаи ҳалли мисоли 4 амал карда, аъзои якум ва фарқи прогрессияро аз системаи зерин меёбем:

$$\begin{cases} a_5 = 72, \\ a_{11} = 138; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + 4d = 72, \\ a_1 + 10d = 138; \end{cases} \quad \begin{cases} 6d = 66, \\ a_1 + 4d = 72; \end{cases} \\ \begin{cases} a_1 = 72 - 4 \cdot 11 \\ d = 11; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 72 - 44 \\ d = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 28, \\ d = 11. \end{cases}$$

Аъзои матлуби понздаҳуми прогрессияи арифметикӣ баъди ба
 ҷойи a_1 ва d гузоштани киматҳои ёфтамон ба
 $a_{15}=28+(15-1) \cdot 11=28+14 \cdot 11=28+154=182$
 баробар мешавад.

Мисоли 6. Дар прогрессияи арифметикии (x_n) аъзои якум ба
 8,7 ва фарқ ба $-0,3$ баробар аст. Муқаррар мекунем, ки шартҳои x_n
 ≥ 0 ва $x_n < 0$ барои кадом аъзоҳои прогрессия иҷро мешаванд.

Ҳал. Барои $x_1+(n-1)d$, ки ба x_n баробар аст, ҳосил мекунем:
 $8,7+(n-1)(-0,3)=8,7+0,3-0,3n=9-0,3n$.

Аз ин ҷо, ҳангоми $x_n \geq 0$ будан, нобаробарии $9-0,3n \geq 0$ ё $n \leq 30$ ва
 ҳангоми $x_n < 0$ будан, нобаробарии $n > 30$ -ро ҳосил мекунем.

Ҳамин тариқ, 30 аъзои аввалии прогрессия гайриманфӣ буда,
 пасояндҳояш (яъне аз аъзои 31-ум сар карда) ададҳои манфӣанд.

Мисоли 7. Қисми ростхатта ҳаракаткунанда дар соати ав-
 вал 13 км масофаро тай кард. Агар он дар ҳар як соати минбаъда
 назар ба соати пешоянд 1,5 км-ро зиёдтар тай кунад, он гоҳ дар
 соати ёздаҳуми ҳаракаташ вай кадом масофаро тай мекунад?

Ҳал. Ҳаракати муоинашаванда (аз рӯи шарт) ҳаракати
 ростхаттаи номунтазам аст, чунки дар фосилаҳои баробари вақт
 масофаи гуногунро тай менамояд. Дар ҳақиқат, қисм соати аввал
 $S_1=13$ км, соати дуюм $S_2=S_1+1,5=14,5$ км, соати сеюм $S_3=S_2+1,5=16$
 км, ... масофаро тай мекунад. Хулоса, тағйирёбии вазъияти қисм
 баъди ҳар як соати ҳаракаташ намуди пайдарпайии (S_n)

13; 14,5; 16; 17,5; ...

-ро мегирад, ки он прогрессияи арифметикиро бо нишондодҳои
 $S_1=13$ ва $d=1,5$ ифода мекунад. Аз ин ҷо мо формулаи $S_n=S_1+(n-1)d$ -
 ро навишта метавонем, ки бо ёрии он дар соати дилхои n чанд км
 масофа тай кардани қисмро меёбем. Ҳангоми $n=11$ будан,

$$S_{11}=S_1+(11-1)d=13+10 \cdot 1,5=13+15=28 \text{ (км)}$$

мешавад.

Қавоб: Қисм дар соати ёздаҳуми ҳаракаташ 28 км масофаро
 тай мекунад.

Мисоли 8. Дар байни ададҳои 4 ва 40 чунин чор ададҳо гу-
 зоред, ки онҳо дар якҷоягӣ бо ададҳои додашуда прогрессияи
 арифметикиро ташкил диҳад.

Ҳал. Мувофиқи шарт мо бояд пайдарпайии охириноки ба
 прогрессияи арифметикии

4; a_2 ; a_3 ; a_4 ; a_5 ; 40

мувофиқояндаро барқарор намоем. Аз киматҳои маълуми
 $a_1=4$ ва $a_6=40$ истифода бурда d -ро меёбем:

$$a_6=a_1+5d; \quad 5d=a_6-a_1; \quad 5d=40-4; \quad 5d=36; \quad d=7,2.$$

Аз ин ҷо пай дар пай аъзои матлуби

$$a_2 = 4 + 7,2 = 11,2; \quad a_3 = 4 + 2 \cdot 7,2 = 18,4;$$

$$a_4 = 4 + 3 \cdot 7,2 = 25,6; \quad a_5 = 4 + 4 \cdot 7,2 = 32,8.$$

ҳосил мешаванд.

Ҷ а в о б: 11,2; 18,4; 25,6; 32,8.

Мисоли 9. Маълум аст, ки суммаи дучандаи аъзои якум ва панҷуми прогрессияи арифметикӣ ба 7 ва фарқи аъзои сеюму ҳафтум ба 8 баробар аст. Прогрессияро барқарор мекунем.

Ҳ а л. Бо мақсади ёфтани аъзои якум ва фарқи прогрессия аз рӯйи шарт системаи

$$\begin{cases} 2a_1 + a_5 = 7, \\ a_3 - a_7 = 8; \end{cases}$$

-ро тартиб дода, онро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} 2a_1 + a_1 + 4d = 7, \\ a_1 + 2d - a_1 - 6d = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} 3a_1 + 4d = 7, \\ -4d = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} 3a_1 = 7 + 8, \\ d = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 5, \\ d = -2. \end{cases}$$

Аз рӯйи ин нишондодҳои охири прогрессияи матлуб

5; 3; 1; -1; -3; -5; -7; ... мешавад.

Э з о ҳ. Формулаи аъзои n -уми прогрессияро табдил дода, ҳосил мекунем:

$a_n = a_1 + (n-1)d = a_1 + n \cdot d - d = n \cdot d + (a_1 - d)$, $a_n = n \cdot d + m$
ки $m = a_1 - d$ аст. Яъне формулаи аъзои n -уми прогрессияи арифметикиро дар шакли

$$a_n = n \cdot d + m$$

ҳам навиштан мумкин аст.

Формулаи охири муодилаи $y = ax + b$ -и хати ростро, ки дар синфи 7 омӯхта шуда буд, ба хотир меорад. Соҳаи муайянии он таъмоми нуқтаҳои тири ададӣ аст. Вале соҳаи муайянии $a_n = n \cdot d + m$ бошад, фақат маҷмӯи ададҳои натуралро ташкил медиҳад. Бо тағйирёбии n (яъне қиматҳои 1, 2, 3, ..., k , ... адади n) қиматҳои

$$a_1 = d + m, \quad a_2 = 2d + m, \quad a_3 = 3d + m, \quad \dots \quad a_k = k \cdot d + m, \dots$$

-ро ҳосил мекунем. Нуқтаҳои $(n; a_n)$, $n \in \mathbb{N}$ координатаҳои маҷмӯи нуқтаҳои дар

хати рости

$$y = x \cdot d + m$$

бандаро, ки

аз яқдигар

дар масофаи

$$\sqrt{1 + d^2}$$

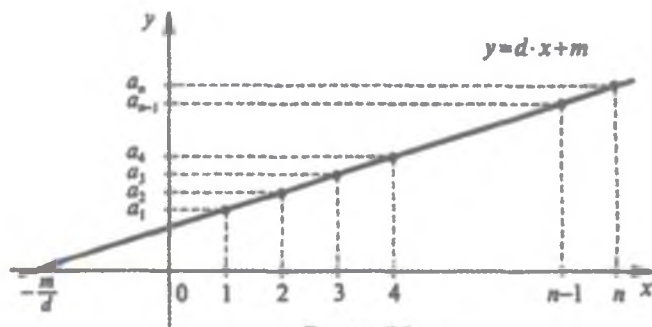
баробар

ҷойгиранд,

ифода меку-

над (ниг. ба

расми 86).



Расми 86

Шакли нави $a_n = n \cdot d + m$ -и навишти аъзои n -уми прогрессияи арифметикии (a_n) аз он шаҳодат медиҳад, ки ҳамаи аъзоҳои прогрессия дар ҳамвории координатавӣ ординатаҳои нуқтаҳои $(n; a_n)$, $n \in N$ мебошад, ки онҳо дар хати ростии $y = x \cdot d + m$ меҳобанд.

Нихоят, қайд мекунем, ки тасдиқоти зерин низ ҷой дорад: ҳар гуна пайдарпайии (a_n) -и аъзои дилхоҳаш бо формулаи $a_n = n \cdot d + m$ додашуда прогрессияи арифметикӣ мебошад. Ба осонӣ нишон додан мумкин аст, ки фарқи $a_{n+1} - a_n$ ба

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)d + m - (n \cdot d + m) = nd + d + m - nd - m - d$$

баробар мешавад: $a_{n+1} - a_n = d$.

Баробарии охирин аз он шаҳодат медиҳад, ки пайдарпайии (a_n) дар ҳақиқат прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳад.

Масалан, пайдарпайии (a_n) , ки бо формулаи $a_n = 2n + 1$ дода шудааст, прогрессияи арифметикиро бо фарқи $d = 2$ ва аъзои якуми $a_1 = 1 \cdot d + m = 2 + 1 = 3$ ифода мекунад.



1. Аъзои n -уми прогрессияи арифметикии (a_n) -ро аз рӯи кадом формула меёбанд? 2. Агар a_k ва a_m ($k \neq m$) аъзои прогрессияи арифметикӣ бошанд, он гоҳ a_1 ва d -ро аз рӯи формулаи $a_n = a_1 + (n-1)d$ ёфта метавонем? 3. Тасдиқотеро, ки аз формулаи $a_n = n \cdot d + m$ бармеояд, баён кунед. Мисолҳо оред.

391. (a_n) прогрессияи арифметикиро бо аъзои якуми a_1 ва фарқи d ифода мекунад. Аъзоҳои

а) a_{17} б) a_{126} ; в) a_{281} г) a_{k+2} д) a_{k+15} е) a_{2k+1} -ро ба воситаи a_1 , ва d ифода кунед.

392. Пайдарпайии (b_i) прогрессияи арифметикӣ мебошад. Агар:

а) $b_1 = 28$ ва $d = 3$ бошад, b_5 -ро;
 б) $b_1 = 15,8$ ва $d = -1,5$ бошад, b_{21} -ро;
 в) $b_1 = -3$ ва $d = 0,7$ бошад, b_{111} -ро;
 г) $b_1 = 108$ ва $d = -0,6$ бошад, b_{216} -ро;
 д) $b_1 = -1$ ва $d = 2$ бошад, b_{31} -ро;
 е) $b_1 = 12,1$ ва $d = -0,1$ бошад, b_{18} -ро;
 ж) $b_1 = 5$ ва $d = 2,3$ бошад, b_{23} -ро;
 з) $b_1 = 103$ ва $d = -5$ бошад, b_{57} -ро;
 и) $b_1 = -41$ ва $d = 4$ бошад, b_{19} -ро;
 к) $b_1 = 191$ ва $d = -21$ бошад, b_7 -ро ёбед.

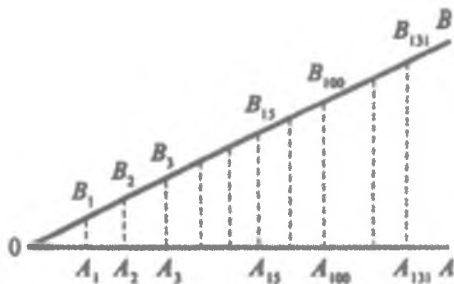
393. Аъзои даҳум, бисту якум ва n -уми прогрессияи арифметикии

а) $\frac{2}{3}$; -2 ; ... б) $2,3$; $1,3$; ... в) -15 ; 10 ; ...
 -ро ёбед.

394. Аъзои 8-ум, 23-юм ва n -уми прогрессияи арифметикии

- а) $-8,5; -6,5; \dots$ б) $10; 7; \dots$
в) $15; -10; \dots$ -ро ёбед.

395. Агар тайёраи аз Душанбе ба Маскав парвозкунанда суръати ҳаракаташро ҳар як дақиқа мунтазам 100 м зиёд кунад, он гоҳ баъди 1 соат суръати ҳаракаташ чӣ қадар мешавад?



Расми 87

396. Сангпушт соати аввали ҳаракаташ 0,8 км ва ҳар як соати минбаъда назар ба соати пешоянд 0,3 км масофаро зиёдтар тай кард. Сангпушт соати ҳафтуми ҳаракат чӣ қадар масофаро тай мекунад?

397. Қатора аз шаҳри Хучанд ба сӯи Конибодом равона шуда, суръаташро ҳар дақиқа 80 м мунтазам зиёд мекард. Суръати қатора дар дақиқаи бисту шашум чӣ қадар мешавад?

398. Кунҷи дилҳои AOB дода шудааст. Аз кулла дар тарафи OA порчаҳои баробар ҷудо шуда, аз нуқтаҳои онҳо хатҳои ростии параллел гузарониданд (расми 87). Агар дарозии порчаи A_1B_1 0,5 см бошад, он гоҳ дарозии порчаҳои $A_{15}B_{15}$, $A_{100}B_{100}$ ва $A_{131}B_{131}$ ба чанд баробар мешавад?

399. Агар:

- а) $a_{301}=1212, d=4$; в) $a_{52}=243, d=2$;
б) $a_{145}=908, d=-7$; г) $a_{18}=97, d=3$

бошад, аъзои якуми прогрессияи арифметикии (a_n) -ро ёбед.

400. Дар прогрессияи арифметикии (y_n) :

- а) $y_1=13, y_{15}=55$; в) $y_1=-4, y_{11}=-54$;
б) $y_1=24,5, y_{25}=-59,5$; г) $y_1=9, y_{37}=63$

аст. Фарқи прогрессияро ёбед.

401. Дар байни ададҳои 15 ва 4,5 шапш ададро ҷунон гузоред, ки онҳо дар якҷоягӣ бо ададҳои додашуда прогрессияи арифметикиро ташкил диҳанд. Ин ададҳо кадомҳоянд?

402. Дар байни ададҳои 2 ва -28 чунин нуҳ ададҳо гузоред, ки онҳо бо ҳамроҳии ададҳои додашуда прогрессияи арифметикиро ташкил диҳанд.

403. Прогрессияи арифметикии (c_n) дода шудааст. Агар:

- а) $c_8=31,5, c_{29}=63$; г) $c_3=15, c_{17}=85$;
б) $c_{20}=0, c_{66}=-92$; ғ) $c_5=12, c_{29}=60$;
в) $c_{10}=-44,2, c_{66}=117$; д) $c_7=-93, c_{11}=-153$

бошад, он гоҳ аъзои якум ва фарқи прогрессия ёфта шавад.

404. Аъзои a_1 -и прогрессияи арифметикии (a_n) ёфта шавад, агар
 а) $a_s=17, a_k=45, s=3, k=7, l=11$;
 б) $a_s=-7, a_k=-34, s=4, k=13, l=7$ бошад.
405. Оё дар прогрессияи арифметикии 12; 19; ... адади
 а) 320; б) 365 ҳаст?
406. Дар прогрессияи арифметикии $-20,8; -19,2; \dots$ чанд аъзо аломати манфӣ дорад? Аъзои мусбати якуми ин прогрессия ба чанд баробар аст?
407. Прогрессияи арифметикии (a_n) -ро аз рӯи вобастагҳои
 а) $\begin{cases} a_2 + 3a_4 = 82, \\ 2a_3 - a_6 = -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2a_4 - a_1 = 26, \\ a_5 + 4a_2 = 64; \end{cases}$
 тартиб диҳед.
408. Пайдарпайи (a_n) бо формулаи:
 а) $a_n=8n+3$; г) $a_n=-2,5n+1,5$; ж) $a_n=5n-3$;
 б) $a_n=2n^2-5$; д) $a_n=-9n$; з) $a_n=11n+4$;
 в) $a_n=n+14$; е) $a_n=-14n+7$; и) $a_n=\frac{2}{n}$;
 г) $a_n=31n+4$; ё) $a_n=2n^2+n-4$; к) $a_n=8$
 дода шудааст. Оё ин пайдарпайи прогрессияи арифметикӣ аст ва агар бошад, аъзои якум ва фарқи онро ёбед.

Машқҳо барои такрор

409. Суммаи рақамҳои адади дурақама ба 7 баробар аст. Агар ба ҳар як рақами адад 2-воҳидӣ илова кунем, он гоҳ ададе ҳосил мешавад, ки аз дучандаи адади аввала 3 воҳид кам аст. Ададро ёбед.
410. Номаълуми x -ро аз таносуб ёбед:
 а) $4,25 : 0,5 = 2\frac{1}{3} : x$; б) $(m+2) : (m-2) = (m^2-4) : m^2x$.
411. Нобаробариро ҳал кунед:
 а) $4(2x-3)-5x < x+4$; в) $-3(x^2-1) \geq 0$;
 б) $\frac{2x}{3} < 7$; г) $5 \leq \frac{2}{3} \cdot (x-3)$.
412. Муодиларо бо тарзи графикӣ ҳал кунед:
 а) $\sqrt{x} = x$; б) $\sqrt{x} = x - 2$.
413. Касрро ихтисор кунед:
 а) $\frac{a^2-16}{ax+4x}$; б) $\frac{3x^2+15xy}{x+5y}$; в) $\frac{3 \cdot (x-2)}{7 \cdot (2-x)}$.
414. Ифодаро сода кунед:

$$\frac{x^3 + y^3}{x + y} : (x^2 - y^2) + \frac{2y}{x + y} - \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

415. Муодилаҳои дуномаълумай

$$а) (x-1)^2+(y+3)^2=36$$

ва

$$б) 2x+3y=6$$

дар ҳамвории координатавӣ кадом хатҳоро тасвир мекунад?

416. Аз рӯи формулаи $a_n=n^3-1$ пайдарпай тартиб диҳед.

24. Формулаи суммаи n -аъзои аввалии прогрессияи арифметикӣ

Дар назди худ масъалаи ёфтани суммаи аъзоҳои шумораашон охирноки прогрессияи арифметикиро мегузорем. Нишон медиҳем, ки бе ҷамъкунии бевосита ҳам ҳалли масъалаи гузошташуда имконпазир аст.

Ба сифати мисол суммаи охирноки

$$2+4+6+\dots+46+48+50,$$

ки пайдарпайии ададҳои ҷуфт мебошад, мегирем. Онро бо S ишорат карда, дар ду намуд бо тартиби афзуншавӣ ва бо тартиби камшавии ҷамъшавандаҳо яш менависем:

$$S=2+4+6+\dots+46+48+50,$$

$$S=50+48+46+\dots+6+4+2.$$

Онҳоро аъзо ба аъзо ҷамъ мекунем:

$$2S=(2+50)+(4+48)+(6+46)+\dots+(46+6)+(48+4)+(50+2).$$

Намоён аст, ки тарафи чап (ниг. ба қавсҳо) аз 25 ҷуфти ададҳои ҳар якеаш ба 52 баробар иборат аст. Пас, $2S=52 \cdot 25$ ва ё $S=650$ -ро ҳосил мекунем.

Қайд мекунем, ки яхела будани суммаи ҷуфти ададҳои зери якдигарбуда дар ин мисол тасодуф набуда, балки ба ҳар гуна прогрессияҳои арифметикӣ, ҷӣ тавре ки дар поён мебинем, хос аст.

Акнун, ба тарзи ёфтани суммаи аъзоҳои прогрессияи арифметикии дар мисол истифодашуда характери умумӣ медиҳем.

Бигзор, суммаи n -аъзои аввалии прогрессияи арифметикии

$$(a_n): \quad a_1 \quad a_2; \quad a_3; \quad \dots; \quad a_n; \dots$$

-ро ёфтан зарур бошад. Онро бо S_n , яъне $S_n=a_1+a_2+\dots+a_n$ ишорат намуда, суммаро дар шаклҳои

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\dots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n \text{ (бо тартиби афзуншавии индексҳо)}$$

ва

$$S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\dots+a_3+a_2+a_1 \text{ (бо тартиби камшавии индексҳо)}$$

менависем. Баъдан, онҳоро аъзо ба аъзо ҷамъ карда, ҳосил мекунем:

$$2 \cdot S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\dots+(a_{n-2}+a_3)+ \\ +(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1).$$

Нишон медиҳем, ки қимати ҳар як ифодаи дар қавсҳо буда ба a_1+a_n баробар аст:

$$\begin{aligned}
 a_2 + a_{n-1} &= (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n; \\
 a_3 + a_{n-2} &= (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n; \\
 a_4 + a_{n-3} &= (a_3 + d) + (a_{n-2} - d) = a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n; \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Возех аст, ки шумораи чунин қавсҳо (ё чуфтҳо) ба n баробар мебошад.

Пас,

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

ва аз он

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad (1)$$

Ин формула формулаи суммаи n аъзои аввалаи прогрессияи (a_n) ё қутохтар гуём, формулаи суммаи прогрессияи арифметикӣ буда, бо ҳамин ном маъмул аст.

Ҳамин тариқ, суммаи прогрессияи арифметикии охиринок ба ҳосили зарби нимсуммаи аъзоҳои канорӣ бар миқдори аъзоҳо баробар аст.

Формулаи (1) ба олими Юнони Қадим Диофант* тааллуқ дорад. Формулаи (1)-ро дигар ҳел ҳам менависанд. Дар он ҷо ба ҷойи a_n киматаш $a_1 + (n-1)d$ -ро гузошта (ниг. ба пункти 23).

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n \quad (2)$$

-ро пайдо мекунем. Формулаи (2) имкон медиҳад, ки суммаи дилхохи аъзоҳои прогрессияи арифметикиро аз рӯи аъзои якум ва фарқи он ёбем.

М и с о л и 1. Суммаи панҷоҳ аъзои аввалаи прогрессияи арифметикии

$$5; 9; 13; 17; 21; \dots$$

-ро меёбем.

Барои татбиқи формулаи (1) кифоя аст, ки аъзои a_{50} -ро ёбем. Азбаски $a_1=5$ ва $a_2=9$ аст, пас $d=a_2-a_1=9-5=4$ ва аз ин ҷо $a_{50}=a_1+49d=5+49 \cdot 4=5+196=201$ мешавад. Он гоҳ суммаи матлуби S_{50} ба

$$S_{50} = \frac{a_1 + a_{50}}{2} \cdot 50 = (5 + 201) \cdot 25 = 206 \cdot 25 = 5150$$

баробар мешавад.

М и с о л и 2. Суммаи чил аъзои аввалаи прогрессияи арифметикии (a_n) -ро, ки бо формулаи $a_n=9n-14$ (ниг. ба эзоҳи пункти 23) дода шудааст, меёбем.

* Диофант (асри III) - риёзидони Александрия. Дар «Арифметика»-и ӯ ибтидои алгебра оварда шуда, як қатор муодилаҳои дараҷаҳои гуногун ҳал шудаанд.

Аз формулаи $a_n = 9n - 14$, ба қойи n аввал 1 ва баъд 40 гузошта, аъзоҳои a_1 ва a_{40} -ро меёбем:

$$a_1 = 9 \cdot 1 - 14 = 9 - 14 = -5; \quad a_{40} = 9 \cdot 40 - 14 = 360 - 14 = 346.$$

Қиматҳои ёфтаамонро ба формулаи (1) гузошта, ҳосил мекунем:

$$S_{40} = \frac{-5 + 346}{2} \cdot 40 = 341 \cdot 20 = 6820, \quad S_{40} = 6820.$$

Мисоли 3. Суммаи $1+2+3+\dots+n$ -ро меёбем.

Дар ин ҷо $a_1 = 1$ ва $a_n = n$ аст. Дар асоси формулаи (1) ин сумма ба $\frac{n(n+1)}{2}$ баробар мешавад.

Ҳамин тариқ, барои суммаи ададҳои натуралии аз 1 то n формулаи

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} - \text{ро ҳосил кардем.}$$

Дар мавриди хусусӣ суммаи 100 аъзои аввалаи ададҳои натуралӣ ба $S_{100} = \frac{100 \cdot (100+1)}{2} = 50 \cdot 100 = 5050$ баробар мешавад*.

Мисоли 4. Суммаи ҳамаи ададҳои натуралии ба n ӯҳ каратии аз 500 калоннабударо меёбем.

Ададҳои натуралии ба n ӯҳ каратиро бо формулаи $a_n = 9n$ ифода кардан мумкин аст. Дар асоси пункти 23 ин гуна адад аъзои n -уми прогрессияи арифметикӣ бо фарқи $d=9$ мебошад. Барои муайян кардани миқдори аъзоҳои прогрессия, ки аз 500 калон нестанд, нобаробарии $a_n \leq 500$ ё $9 \cdot n \leq 500$ -ро ҳал мекунем.

Аз ин ҷо, $n \leq 55\frac{5}{9}$ -ро ҳосил карда, ба хулоса меошем, ки шумораи аъзоҳои прогрессияи ба суммаи матлуб дохилшаванда 55-то аст (n - адади касрӣ шуда наметавонад). Пас, $a_1=9$, $a_{55}=9 \cdot 55=495$ ва

$$S_{55} = \frac{9 + 495}{2} \cdot 55 = \frac{504}{4} \cdot 55 = 252 \cdot 55 = 13860$$

мешавад.

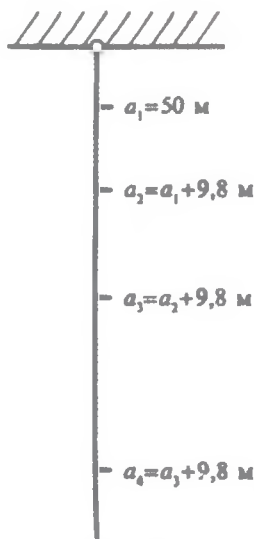
Ҷавоб: 13860.

Мисоли 5. Суммаи ҳамаи ададҳои натуралии дурақамаро меёбем.

Суммаи матлуб ба $S=10+11+\dots+99$ баробар аст. Маълум аст, ки ҷамъшавандаҳои он прогрессияи арифметикӣ мебошад. Дар он $a_1=10$, $a_n=99$ ва $d=1$ аст. Аз рӯи формулаи $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ шумораи аъзои прогрессияро меёбем:

$$99 = 10 + (n-1); \quad n-1 = 99-10; \quad n=90.$$

* Риёзидони машҳури олмонӣ Карл Гаусс Фридрих (1777–1855) ҳуноз дар синни хурди мактабияш ин суммаро дар муддати як дақиқа ҳисоб карда буд. Баробар будани суммаҳои $1+100$, $2+99$, ..., $100+1$ -ро пайҳас карда, адади 101-ро ба шумораи умумии суммаҳо 50 зарб кард.



Расми 88

Аз ин ҷо,

$$S = 10 + 11 + 12 + \dots + 99 = \frac{10+99}{2} \cdot 90 = 109 \cdot 45 = 4905$$

Ин натиҷаро бо роҳи дигар ҳам ёфтан мумкин аст.

Маълум аст, ки $S = S_{99} - S_9 = S_{100} - S_9 - 100$ ҳам мешавад. Азбаски $S_{100} = 5050$ ва $S_9 = 45$ аст (ниг. ба мисоли 3), пас $S = 5050 - 45 - 100 = 4905$.

Мисоли 6. Парашутчӣ дар сонияи аввали озодафтиаш 50м ва дар ҳар як сонияи минбаъда 9,8м зиёдтар масофаро тай мекунад. Агар парашутчӣ дар 12 сония ба замин омада расида бошад, он гоҳ аз кадом баландӣ чаҳиданашро меёбем.

Ҳал. Траекторияи ҳаракати парашутчӣ ба поён ростхатта аст. Мувофиқи шарт ӯ дар ҳар як сонияи минбаъдаи поёнфуроӣ назар ба сонияи пештара 9,8 м зиёдтар масофаро тай мекунад (ниг. ба расми 88).

Тағйирёбии мавқеи парашутчӣ дар ҳар як сонияи озодафти ба пайдарпайии

$$50; 59,8; 69,6; 79,4; \dots$$

оварда мерасонад, ки он прогрессияи арифметикиро бо нишондодҳои $a_1 = 50$ ва $d = 9,8$ ифода мекунад. Азбаски

$$a_{12} = a_1 + 11 \cdot d = 50 + 11 \cdot 9,8 = 50 + 107,8 = 157,8 \text{ (м)}$$

аст (яъне парашутчӣ дар сонияи 12-ум 157,8 м поён мефуроӣ), пас баландии матлуб

$$S_{12} = \frac{50+157,8}{2} \cdot 12 = 207,8 \cdot 6 = 1246,8 \text{ (м)}$$

мешавад.

Ҷавоб: 1246,8 м.

Мисоли 7. Бигзор v_0 - суръати ибтидоӣ, a - шитоб ва t - вақт бошад. Масофаи тайкардаи нуктаи материалиро дар вақти t -и ҳаракаташ меёбем.

Ҳал. Азбаски a зиёдшавии суръатро дар муддати як сонияи ҳаракат ифода мекунад, пас аз рӯи формулаи $v_1 = v_0 + at$ пайдарпайии

$$v_1 = v_0 + a, \quad v_2 = v_0 + 2a, \quad v_3 = v_0 + 3a, \quad v_4 = v_0 + 4a, \quad \dots$$

ҳосил мешавад. Пайдарпайии (v_t) , $t \in \mathbb{N}$ прогрессияи арифметикиро бо фарқи a ташкил медиҳад. Аз ин ҷо, роҳи тайшударо дар муддати t сония бо формулаи (1) меёбем:

$$S = \frac{v_0 + v_t}{2} \cdot t = \frac{v_0 + v_0 + at}{2} \cdot t = \frac{2v_0 + at}{2} \cdot t = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}.$$

Ин формула дар физика ҳамчун формулаи ҳаракати собитши-
тоби нуқтаи материалӣ маълум аст.

М и с о л и 8. Дар мусобиқаи мактабӣ оид ба футбол 36 бозӣ гузаронида шуд. Агар ҳар як даста бо дастаи дигар як маротиба бозӣ карда бошад, дар мусобиқа чанд даста иштирок кардааст.

Ҳал. Бигзор, дар мусобиқа n ($n > 0$) даста иштирок карда бошад. Он гоҳ яке аз ин дастаҳо бо дигарҳояш $n-1$ бозӣ мекунад. Аз $n-1$ дастаи боқимонда якеаш бо дигараш якмаротибагӣ бозӣ карда, $n-2$ вохурӣ мегузаронад. Вазеҳ аст, ки дар охир ду даста ме-монад ва бо якдигар як бозӣ мекунанд. Дар асоси муҳокимаро-ниҳоямон прогрессияи арифметикий

$$n-1; n-2; \dots; 3; 2; 1$$

-ро ҳосил мекунем, ки мувофиқи шарти масъала суммаи аъзояш ба 36 баробар аст. Яъне мувофиқи формулаи суммаи прогрессияи арифметикӣ

$$36 = \frac{(n-1)+1}{2} \cdot (n-1).$$

Аз ин ҷо,

$$72 = n^2 - n$$

ё

$$n^2 - n - 72 = 0.$$

Ин муодилаи квадратии ислоҳшударо ҳал карда меёбем:

$$n_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 72} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{289}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{17}{2}; \quad n_1 = 9, \quad n_2 = -8.$$

Азбаски шумораи командаҳо адади манфӣ шуда наметавонад, пас қимати $n=9$ -ро ба инобат мегирему ҳалос.

Ҷ а в о б: 9 команда.

?

1. Формулаи (1)-ро, ки суммаи n аъзои аввали прогрессияи арифметикиро ифода мекунад, исбот кунед. Мисолҳо оред. 2. Оё аз рӯйи аъзои якум ва фарқи прогрессия суммаи прогрессияи арифметикӣ ёфта мешавад? Агар чунин амалиёт имконпазир бошад, он гоҳ аз рӯйи кадом формула амалӣ мегардад? Мисолҳо оред.

417. Суммаи понздаҳ аъзои аввалаи прогрессияи арифметикий (a_n)-ро ёбед, агар $a_1=7$ ва $d=-3$ бошад.

418. Пайдарпайии (x_n) дода шудааст.

а) $x_n=4n+12$; б) $x_n=2n+13$; в) $x_n=n-8$; г) $x_n=-3n+5$.

Суммаи панҷоҳ, сад ва n аъзои аввали онро ёбед.

419. Суммаро ёбед:

а) $2+4+6+\dots+(2n-2)+2n+(2n+2)$;

б) $1+3+5+\dots+(2n-3)+(2n-1)+(2n+1)$.

420. Ёбед:

- а) суммаи ҳамаи ададҳои натуралиро, ки аз 250 калон нестанд;
- б) суммаи ҳамаи ададҳои натурали аз 80 то 180-ро;
- в) суммаи ҳамаи ададҳои натурали ба се каратию аз 800 калоннабударо;
- г) суммаи ҳамаи ададҳои натурали ба 6 каратию аз 180 калоннабударо;
- г) суммаи ҳамаи ададҳои натурали ба 9 каратию аз 210 калоннабударо;
- д) суммаи ҳамаи ададҳои дурақамаи таксимкунандаи 4 ва бақияи 1 доштаро;
- е) суммаи $a_{11}+a_{12}+\dots+a_{44}$ бо аъзои, $a_n=7n$ -ро.

421. Прогрессияи арифметикиро ёбед, ки дар он чӣ қадар аъзо-хояшро нагирем, ҳамеша суммааш ба сечанди квадрати шумораи ин аъзоҳо баробар аст.

422. Прогрессияи арифметикии (a_n) дода шудааст. Агар:

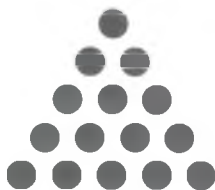
- а) $a_2=13$ ва $d=3$ бошад, $a_{15}+a_{16}+\dots+a_{30}$ -ро ёбед;
- б) $a_1=21$ ва $a_2=20,5$ бошад, $a_6+a_7+\dots+a_{25}$ -ро ёбед;
- в) $a_8=14$ ва $a_{19}=-35,5$ бошад, S_{27} -ро ёбед;
- г) $a_1=4,2$ ва $a_{12}=18,5$ бошад, S_{15} -ро ёбед.

423. Бори аз тайёра бо парашут партофташуда дар сонияи аввали ҳаракат 5,2 м ва дар ҳар як сонияи минбаъда нисбати сонияи пешина 9,8 м зиёд масофаро тай мекунад. Агар бор пас аз 11 сония ба замин расад, пас вай аз чӣ қадар баландӣ партофта шудааст?

424. Чисми озодафтанда (яъне $v_0=0$, $a=g=9,8$ м/сон²) дар

- а) сонияи даҳуми баъди ибтидои афтиш;
- б) даҳ сонияи баъди ибтидои афтиш чӣ қадар масофаро тай мекунад?

425. Дар мусобиқаи шохмотбозон 45 бозӣ гузаронида шуд. Ҳар як бозингар бо шохмотбози дигар як навбат бозӣ кардааст. Шумораи иштирокчиёни мусобиқаро ёбед?



Расми 89

426. Сақоҳо дар шакли секунҷа ҷойгиранд. Дар қатори якум 1-то, дар қатори дуюм 2-то ва гайра сақо ҳаст (расми 89).

а) Агар ҳамаи сақоҳо 276 дона бошанд, он гоҳ онҳо дар чанд қатор ҷой мегиранд?

б) Барои тартиб додани секунҷаи дорои 80 қатор чандто сақо лозим мешавад?

427. Оё қимати пайдарпайии ифодаҳои $(a+x)^2$, (a^2+x^2) , $(a-x)^2$, ... прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳад? Агар бошад, суммаи n -аъзои аввалаашро ёбед.

Машқҳо барои такрор

428. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

а) $y = 2\sqrt{x-1} + \frac{5}{\sqrt{4-x}}$;

г) $y = \frac{\sqrt{20+x-x^2}}{x^2-16}$;

б) $y = \frac{x-1}{x+2} + \sqrt[3]{x-1}$;

г) $y = \frac{x-1}{x^2+1}$;

в) $y = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2-1}$; д) $y = \sqrt{x^2-7x+12} - \frac{3}{\sqrt{x-4}}$

429. Суммаи рақамҳои адади дурақама ба 9 баробар аст. Агар ҷойи рақамҳои ин ададро иваз кунем, адади наvero ҳосил мекунем, ки он ба $\frac{5}{6}$ ҳиссаи адади аввала баробар аст. Адади дурақамаро ёбед.

430. Периметри росткунча ба $2p$ ва масоҳаташ ба S баробар аст. Аз рӯи ин ду нишондод муодилаи квадратии ислохшудаи ба бузургии тарафҳои росткунча вобастаро тартиб диҳед.

431. Қимати ифодаро ёбед:

а) $\frac{2^8 \cdot 7^9}{14^{10}}$;

б) $\frac{14^{10}}{2^8 \cdot 7^9}$;

в) $\frac{12^5}{2^3 \cdot 3^4} \cdot \frac{10^5}{2^6 \cdot 5^7}$;

г) $\frac{10^5}{2^6 \cdot 5^7} \cdot \frac{12^5}{2^3 \cdot 3^4}$.

432. Графики функсияро созед:

а) $y = \left| \frac{2x-3}{x-2} \right|$;

б) $y = \frac{1}{|x-2|}$.

433. Кадоме аз функсияҳои хаттии

а) $y=2x+7$; б) $y=-4x+3$; в) $y=0,1x+2$; г) $y=2-x$

афзуншаванда ва кадомаш камшавандаанд?

434. Нишон диҳед, ки барои қимати дилхохи x ссаъзогии $-5x^2+10x-5$ қимати гайримусбатро мегирад.

§8. ПРОГРЕССИЯИ ГЕОМЕТРӢ

25. Таърифи прогрессияи геометрӣ

Аз мисол оғоз мекунем. Пайдарпайҳои

$$3; 6; 12; 24; 48; \dots \quad \text{ва} \quad 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$$

-ро дида мебароем. Мушоҳидаи бевосита нишон медиҳад, ки дар пайдарпайии якум аз аъзои дуомаш сар карда, ҳар як аъзои насоянда ду маротиба зиёд ва дар пайдарпайии дуома ду маротиба кам мешавад. Ин мисолҳо ба мафҳуми прогрессияи геометрӣ меоваранд, ки мо ба омӯзиши он шуруъ мекунем.

Бигзор, пайдарпайии

$$(b_n): b_1; b_2; b_3; \dots; b_n; \dots$$

дода шудааст.

Т а ъ р и ф. Пайдарпайии аъзохояш гайриинулӣ прогрессияи геометрӣ номида мешавад, агар аз аъзои дуумаш сар карда, ҳар як аъзои пасояндаш ба ҳосили зарби пешояндаш бар адади доимӣ баробар бошад.

Дар асоси таъриф барои пайдарпайии (b_n) баробарии

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

-ро, ки дар ин ҷо q - ягон адад аст, навиштан мумкин аст. Масалан, барои мисолҳои дар боло навиштаамон, мувофиқан, баробариҳои

$$b_{n+1} = b_n \cdot 2 \quad \text{ва} \quad b_{n+1} = b_n \cdot \frac{1}{2}$$

ҷойдоранд.

Қайд мекунем, ки аз таъриф хулосаи муҳими дигар ҳам бармеояд: аз аъзои дуум сар карда, нисбати аъзои дилхоҳи он бар пешояндаш ба адади доимии q баробар аст:

$$b_{n+1} : b_n = q$$

Адади доимии гайриинулии q -ро маҳраҷи прогрессияи геометрӣ меноманд. Маҳраҷҳои прогрессияҳои мисолҳои дар боло зикршуда, мувофиқан, ба 2 ва $\frac{1}{2}$ баробар мебошанд.

Баробарии $b_{n+1} = b_n \cdot q$ нишон медиҳад, ки барои муайян кардани прогрессияи геометрӣ, яъне ёфтани аъзои дилхоҳи он, донистани аъзои якум ва маҳраҷи он кифоя аст (чунон ки барои прогрессияи арифметикӣ донистани аъзои якум ва фарқаш кифоя буд).

Дар ҳақиқат, масалан, агар:

а) $b_1 = -1$ ва $q = 2$ бошад, он гоҳ

$$(b_n): -1; -2; -4; -8; -16; -32; -64; \dots$$

б) $b_1 = \frac{1}{3}$ ва $q = 1$ бошад, он гоҳ

$$(b_n): \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{3}; \dots$$

в) $b_1 = 3$ ва $q = -2$ бошад, он гоҳ

$$(b_n): 3; -6; 12; -24; 48; -96; \dots$$

г) $b_1 = 2$ ва $q = 0,2$ бошад, он гоҳ

$$(b_n): 2; 0,4; 0,08; 0,016; 0,0032; \dots$$

Ба монанди прогрессияи арифметикӣ прогрессияи геометрӣ ҳам вобаста ба шумораи аъзохояш охирик ва беохир мешавад. Масалан, прогрессияи

$$6; -18; 54; -162; 486;$$

охирик аст, чунки ҳамагӣ панҷ аъзо дорад. Вале прогрессияи геометрии $\left((b_n): b_1 = \frac{1}{8}, q = \frac{1}{3} \right)$

$$\frac{1}{8}; \frac{1}{24}; \frac{1}{72}; \frac{1}{216}; \dots$$

беохир аст, чунки шумораи беохори аъзохоро дар бар гирифтааст.

Дар прогрессияи геометрии охирноки

$$-1; -0,1; -0,001; -0,0001$$

аъзoi -1 ва $-0,0001$ -ро аъзoi канорӣ меноманд.

Ниҳоят, қайд мекунем, ки ду аъзoi b_s аз b_k -и прогрессияи геометрӣ (он барои прогрессияи арифметикӣ низ дуруст аст) аз аъзoi дигари b_l дар як ҳел дури ҷойгир аст, агар шарти

$$|s-l|=|k-l|$$

иҷро гардад. Масалан, b_{15} аз b_{10} ва b_{20} дар як ҳел дури ҷой гирифта-аст.

?

1. Чӣ гуна пайдарпайиро прогрессияи геометрӣ меноманд? Мисолҳо оред. 2. Махраҷи прогрессия гуфта, кадом ададро меноманд? Якчанд прогрессияи геометриро оварда, махраҷашро нишон диҳед. 3. Барои муайян кардани прогрессияи геометрӣ дода шудани чӣ қифоя аст? 4. Кадом прогрессияҳоро охиринок ва кадомашро беохир меноманд? 5. Кадом аъзoi прогрессияи геометриро аъзoi канорӣ меноманд? Мисол оред.

435. Аз рӯи аъзoi якум ва махраҷи прогрессияи геометрии (b_n) шаш аъзoi аввалашро ёбед:

а) $b_1 = 2, q = 2$; г) $b_1 = \frac{2}{5}, q = 3\sqrt{2}$; е) $b_1 = -5, q = -2$;

б) $b_1 = -18, q = \frac{1}{2}$ г) $b_1 = 1, q = \frac{2}{3}$; ё) $b_1 = -\frac{3}{4}, q = \frac{1}{3}$.

в) $b_1 = -24, q = -2,5$; д) $b_1 = -4, q = 9$;

436. Агар:

а) $b_1 = 0,1, q = 3$; г) $b_1 = 10, q = \frac{1}{2}$; ж) $b_1 = 4, q = 0,2$;

б) $b_1 = -\frac{1}{10}, q = \frac{1}{10}$; д) $b_1 = 13, q = -2$; з) $b_1 = 8, q = -4$.

в) $b_1 = -9, q = 1$; е) $b_1 = 12, q = 0,1$;

г) $b_1 = 11, q = -3$ ё) $b_1 = 7, q = 5$;

бошад, прогрессияи геометрии (b_n)-ро тартиб диҳед.

437. Аз формулаи $b_{n+1} = b_n \cdot 3$ истифода карда, прогрессияи геометрии (b_n) -ро тартиб диҳед, агар

а) $b_1 = -4$; г) $b_1 = 11$; е) $b_1 = 0,02$; з) $b_1 = 3$;

б) $b_1 = -\frac{1}{9}$; г) $b_1 = 20$; ё) $b_1 = 8$; и) $b_1 = 0,3$;

в) $b_1 = 1$; д) $b_1 = 15$; ж) $b_1 = 19$; к) $b_1 = -10$

бошад.

438. Аз рӯи аъзoi додашудаи прогрессияи геометрӣ ва махраҷаш аъзoi пасояндашро ёбед:

а) $b_6 = 104, q = -\frac{1}{2}$; в) $b_5 = 24, q = \frac{1}{9}$;

б) $b_{100} = 1000, q = \frac{1}{10}$; г) $b_{32} = 141, q = 3$.

439. Агар:

а) $b_3=31$ ва $q=2$ бошад, он гоҳ дар ҷавоб b_{4^2} -ро;

б) $b_6=-14$ ва $q = -\frac{1}{2}$ бошад, он гоҳ дар ҷавоб $\frac{b_7}{49}$ -ро;

в) $b_{29}=144$ ва $q = -\frac{1}{12}$ бошад, он гоҳ дар ҷавоб $32b_{31}$ -ро;

г) $b_{61}=169$ ва $q = \frac{1}{13}$ бошад, он гоҳ дар ҷавоб b_{62} -ро нависед.

440. Прогрессияи геометрии то аъзои ҳафтумаш нависед:

а) 0,2; 0,4; ...; г) $\frac{1}{5}\sqrt{7}$; $\frac{1}{25}\sqrt{7}$; ...;

б) $\sqrt{2}$; $0,3\sqrt{2}$; ...; д) $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{8}$; ...;

в) 7; 49; 343; ...; е) 2; 8; 32; ...;

г) 5,625; -39,375; ...; ё) 1,4; 1,82;

441. Кадоме аз прогрессияҳои геометрии

а) $-\frac{1}{2}$; 1; -2; 4; -8; г) 5; $\frac{5}{4}$; $\frac{5}{16}$; $\frac{5}{64}$; $\frac{5}{256}$;

б) 6; 2; $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{2}{27}$; д) 0,2; 0,02; 0,002; ...;

в) -3; 1; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3^2}$; $-\frac{1}{3^3}$; е) $\frac{1}{5}$; $-\frac{1}{5^2}$; $\frac{1}{5^3}$; $-\frac{1}{5^4}$; ...;

г) 11; 11; 11; 11; ...; ё) $\frac{1}{81}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{3}$; 1; 3.

охирнок ва кадомаш беохир аст?

442. Аъзои қанории прогрессияи охирнокро ёбед:

а) 6; -3; $\frac{3}{2}$; $-\frac{3}{4}$; в) $\frac{1}{10^2}$; $-\frac{1}{10}$; 1; -10; b_5 ;

б) 1; 7; 49; 343; 2401; г) b_1 ; 3; -9; 27; -81; b_6 .

443. Прогрессияи геометрии охирноки

b_1 ; b_2 ; b_3 ; ... b_{20}

дода шудааст.

а) Ҷуфти аз аъзои b_1 дар як ҳел дури ҷойгирифтаи фарқи индексҳои ба 3 воҳид баробарбударо ёбед;

б) Аъзои b_2 ва b_6 -и (b_n) аз кадомаш дар як ҳел дури воқеъ аст?

в) Оё аъзоҳои b_3 b_{10} ва b_{15} аз якдигар дар як ҳел дури ҷойгиранд?

Машқҳо барои тақрор

Ду масъалаи зерини (№ 444, 445) ал-Карачиро ҳал кунед:

444. Масоҳати росткунҷаи асосаш аз баландиаш 2 баробар зиёд ва масоҳаташ ададан ба периметраш баробарро ёбед.

445. Диаметри доирасро ёбед, ки масоҳаташ ба 100 баробар бошад.

446. Исбот кунед, ки суммаи ду адади мусбати ба ҳам чаппа аз 2 хурд нест.

447. Аз рӯйи решаҳои додашуда муодилаи квадрати тартиб диҳед:

а) 2 ва 3; б) $2 - \sqrt{3}$ ва $2 + \sqrt{3}$ в) $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$.

448. Ёбед:

а) 8%-и 20,4 т-ро; в) 62,5%-и $248\frac{3}{4}$ го-ро;

б) $\frac{3}{4}$ %-и 600 т-ро; г) $3\frac{1}{4}$ %-и 1980-ро.

449. Хурдтарин каратнокии умумии ададҳои 750, 600 ва 450-ро ёбед.

450. Графикро насохта, абсиссаи нуктаҳои буриши хатҳо ва тире Ox -ро ёбед:

а) $y=3x+5$; в) $y=2x+3$; г) $y=x^2-2\frac{1}{4}$;

б) $y=4x-2$; г) $y=2x^2-8$; д) $y=x^2+1$.

451. Дар ифодаи зерин квадрати пурра чудо карда шавад:

а) $x^2-8x-12$; в) $2x^2-4x-9$.

452. Касри

$$\frac{3x^2 - 5x + 2}{(x-1)^2}$$

-ро ихтисор кунед.

26. Формулаи аъзои n -уми прогрессияи геометрӣ

Бигзор, аъзои якум b_1 ва маҳраҷи прогрессияи геометрӣ q дода шуда бошад. Аз рӯйи ин додашудаҳо ҳосил мекунем:

$$b_2 = b_1 \cdot q^{2-1}$$

$$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 \cdot q) \cdot q = b_1 \cdot q^2 = b_1 \cdot q^{3-1},$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 \cdot q^2) \cdot q = b_1 \cdot q^3 = b_1 \cdot q^{4-1},$$

$$b_5 = b_4 \cdot q = (b_1 \cdot q^3) \cdot q = b_1 \cdot q^4 = b_1 \cdot q^{5-1}.$$

Бо ҳамин тарз пай дар пай аъзои дигари прогрессия $b_6 = b_1 \cdot q^{6-1}$, $b_7 = b_1 \cdot q^{7-1}$ ёфта мешаванд. Агар ба қисми рости баробариҳои болоӣ диққат диҳем, он гоҳ мебинем, ки аз аъзои дуюм сар карда, дараҷаи q дар онҳо аз рақами индекси қисми чап як воҳид хурд аст. Пас, аз рӯйи ин нишона барои ёфтани b_n аъзои якумро ба q^{n-1} зарб задан кофист:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \quad (1)$$

Ин формуларо формулаи аъзои n -уми прогрессияи геометрӣ меноманд.

Дар поён ҳалли мисолу масъалаҳоеро меорем, ки истифодаи ин формула самараро хуб додааст.

Мисоли 1. Агар $b_1 = \frac{10}{11}$ ва $q = \frac{1}{2}$ бошад, он гоҳ b_6 -и прогрессияи геометрии (b_n) -ро меёбем.

Аз формулаи (1) хангоми $n=6$ будан,

$$b_6 = b_1 \cdot q^5 = \frac{10}{11} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{11} \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{176}.$$

Мисоли 2. Дар прогрессияи геометрӣ $b_5=2304$ ва $b_9=589\ 824$ аст. Аъзои дувоздахуми онро меёбем.

Дар асоси формулаи аъзои n -ум барои b_5 ва b_9 баробариҳои $b_5 = b_1 \cdot q^4$ ва $b_9 = b_1 \cdot q^8$ -ро навиштан мумкин аст. Нисбати

$$\frac{b_9}{b_5} = \frac{589824}{2304}; \quad \frac{b_1 \cdot q^8}{b_1 \cdot q^4} = \frac{589824}{2304}$$

-ро тартиб дода, аз он $256=q^4$ -ро ҳосил мекунем.

Барои ёфтани қимати q муодилаи

$$0=256-q^4=16^2-(q^2)^2=(16-q^2) \cdot (16+q^2)= \\ = (4-q) \cdot (4+q) \cdot (16+q^2)$$

-ро ҳал мекунем. Азбаски $16+q^2 \neq 0$ аст, пас $(4-q)(4+q)=0$ мешавад. Решаҳои ин муодилаи квадратӣ $q_1=-4$ ва $q_2=4$ мебошанд. Азбаски мувофиқи таърифи прогрессияи геометрӣ $b_5=b_1 \cdot q^4$ аст, пас ҳангоми $q=\pm 4$ будан, $b_1 = \frac{b_5}{q^4} = \frac{2304}{256} = 9$ мешавад.

Ҳамин тарик, ду прогрессия вучуд дорад, ки онҳо шартӣ масъаларо қаноат наменаоянд. Агар $q=4$ бошад,

$$b_{12}=9 \cdot 4^{11}=9 \cdot 1048\ 576=37\ 748\ 736$$

ва ҳангоми $q=-4$ будан,

$$b_{12}=9 \cdot (-4)^{11}=9 \cdot (-1048\ 576)=-37\ 748\ 736$$

мешавад.

Мисоли 3. Пайдарпайии $3; b_2; b_3; 192$ прогрессияи геометрии ташкил медиҳад b_2 ва b_3 -ро меёбем. Аз рӯи таърифи прогрессияи геометрӣ баробариҳои $3q=b_2$, $b_3 \cdot q=192$ -ро навиштан мумкин аст. Аз онҳо

$$b_3 \cdot q=192; \quad b_2 \cdot q^2=192; \quad 3q^3=192; \quad q^3=64; \quad q=4$$

-ро ҳосил мекунем. Мувофиқи формулаи (1) $b_2=b_1 \cdot q=3 \cdot 4=12$ ва $b_3=b_1 \cdot q^2=3 \cdot 4^2=3 \cdot 16=48$ -ро пайдо мекунем.

Ҷавоб: $b_2=12; b_3=48$.

Мисоли 4. Пайдарпайии (b_n) прогрессияи геометриест, ки аъзои якумаш ба c_1 ва маҳраҷаш ба q баробар аст. $2c_{18}$ ва $c_2 \cdot c_{10}$ -ро ба воситаи c_1 ва q ифода мекунем.

Ҳал. Формулаи (1) имконият медиҳад, ки баробариҳои

$$c_2=c_1 \cdot q, \quad c_{10}=c_1 \cdot q^9, \quad \text{ва} \quad c_{18}=c_1 \cdot q^{17},$$

-ро нависем. Аз онҳо ҳосил мекунем:

$$2c_{18}=2c_1 \cdot q^{17} \\ c_2 \cdot c_{10}=c_1 \cdot q \cdot c_1 \cdot q^9=c_1^2 \cdot q^{10}$$

Мисоли 5. Агар бонк ҳар сол амонатпулии мизочонашро 5% зиёд кунад, он гоҳ меёбем, ки 4000 сомонӣ пули гузошташуда баъди панҷ сол чанд сомони ро ташкил мекунад?

Ҳал. Агар бо b_1 пули гузошташударо ишорат кунем, он гоҳ баъди расо як сол $b_2=4000+4000 \cdot 0,05=4000 \cdot 1,05=4200$ сомонӣ мешавад. Дар охири соли дуюм миқдори пул ба $b_3=4200 \cdot 1,05=4410$

сомонӣ мерасад. Яъне мо бо прогрессияи геометрии нишондодҳои $b_1=4000$, $q=1,05$ сару кор дорем ва аз он $b_6=b_1 \cdot q^5=4000 \cdot (1,05)^5=4000 \cdot 1,2762815=5105,126$. Ҳамин тариқ, баъди 5 сол пули гузошташуда 5105 сомони ву 13 дирамро ташкил медиҳад.

?

1. Аъзои n -уми прогрессияи геометрии аз рӯи кадом формула меёбанд? 2. Бо иҷрошавии кадом шарт аъзои прогрессияи геометрии ба ҳамдигар баробар мешаванд? 3. Агар а) $b_1 < 0$, $q < 0$ ва б) $b_1 > 0$, $q < 0$ бошад, нисбати аломати аъзои прогрессия чӣ гуна хулосаҳо баровардан мумкин аст? Мисолҳо оред.

453. Пайдарпайии (c_n) прогрессияи геометрии, ки аъзои якумаш ба c_1 ва маҳраҷаш ба q баробар аст.

- | | | | |
|----------------|----------------|-------------------------|------------------------------|
| а) c_{16} ; | г) c_k ; | е) $3 \cdot c_{4l}$; | з) $c_7 \cdot c_k$; |
| б) c_{30} ; | г) c_{k+8} ; | ё) $2 \cdot c_{8l}$; | и) $c_{19} : c_{12} + c_1$; |
| в) c_{126} ; | д) c_{2k} ; | ж) $c_5 \cdot c_{17}$; | к) $c_7 + c_{2l}$ |

c_1 ва q ифода кунед.

454. Пайдарпайии (x_n) прогрессияи геометрии мебошад. Агар:

- а) $x_1 = 160$ ва $q = \frac{1}{2}$ бошад, x_8 -ро;
 б) $x_1 = -810$ ва $q = \frac{1}{9}$ бошад, x_4 -ро;
 в) $x_1 = 2\sqrt{2}$ ва $q = -\sqrt{2}$ бошад, x_9 -ро;
 г) $x_1 = 12\,500$ ва $q = 0,2$ бошад, x_8 -ро;
 г) $x_1 = 17$ ва $q = -2$ бошад, x_9 -ро;
 д) $x_1 = 10$ ва $q = 5$ бошад, x_{11} -ро;
 е) $x_1 = -\frac{1}{10}$ ва $q = 10$ бошад, x_5 -ро;
 ё) $x_1 = \frac{2}{3}$ ва $q = \frac{3}{2}$ бошад, x_6 -ро;
 ж) $x_1 = \frac{9}{4}$ ва $q = \frac{2}{3}$ бошад, x_6 -ро;
 з) $x_1 = 1,8$ ва $q = \frac{2}{\sqrt{3}}$ бошад, x_4 -ро;

ёбед.

455. Аъзои ҳафтум ва n -уми прогрессияи геометрии

- | | |
|--------------------------------------|--|
| а) -2 ; 6 ; -18 ; 54 ; ... | г) 4 ; -8 ; 16 ; -32 ; ... |
| б) 80 ; 40 ; 20 ; 10 ; ... | д) 5 ; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{125}$; ... |
| в) $0,125$; $0,25$; ... | е) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{32}$; ... |
| г) -12 ; 12 ; -12 ; 12 ; ... | ё) a ; $3a^2$; $9a^3$; ... |

-ро ёбед.

456. Прогрессияи геометрии (b_n) дода шудааст. Агар:
- а) $b_8 = 27, q = 3$; г) $b_4 = \frac{1}{2}, q = -4$; е) $b_6 = 0,32, q = 0,2$;
 б) $b_9 = \frac{21875}{32}, q = -2\frac{1}{2}$; ф) $b_9 = 18, q = 3$; ё) $b_5 = 14641, q = 11$;
 в) $b_7 = 2, q = -3$; д) $b_2 = 8, q = -1$;
 бошад, аъзои якуми прогрессияро ёбед.

457. Прогрессияи геометрии (c_n) дода шудааст. Агар:

- а) $c_3 = \frac{6}{9}, c_5 = -6$ г) $c_3 = 20, c_6 = -160$;
 б) $c_{10} = 3,24, c_8 = 9$ г) $c_4 = 192, c_{10} = 786432$.

бошад, махрачи прогрессияро ёбед.

458. Пайдарпайии (b_n) прогрессияи геометрӣ мебошад. Агар:

- а) $b_2 = 25$ ва $b_4 = 1$ бошад, b_6 -ро;
 б) $b_1 = -\frac{2}{9}$ ва $b_5 = -18$ бошад, b_7 -ро;
 в) $b_4 = -1$ ва $b_6 = -100$ бошад, b_1 -ро;
 г) $b_5 = 324$ ва $b_7 = 2916$ бошад, b_{10} -ро;
 ф) $b_3 = 0,048$ ва $b_5 = 0,00192$ бошад, b_8 -ро ёбед.

459. Дар байни ададҳои 6 ва 1458 чор ададери нависед, ки онҳо дар якҷоягӣ бо ададҳои додашудаи канорӣ прогрессияи геометрияро ташкил диҳанд.

460. Дар байни ададҳои 1 ва 256 чунин се ададери нависед, ки пайдарпайии 1; x_2 ; x_3 ; x_4 ; 256 прогрессияи геометрияро ташкил диҳад.

461. Прогрессияи геометрии (x_n) аз шаш аъзои

$$\frac{1}{2}; x_2; x_3; x_4; x_5; \frac{1}{64};$$

иборат аст. Онро ёбед.

462. Аъзои якум ва махрачи прогрессияи геометрӣ ёфта шавад, агар:

- а) $b_3 - b_1 = 9$ ва $b_5 - b_3 = 36$; б) $b_1 + b_4 = 27$ ва $b_2 + b_3 = 18$;
 бошад.

463. Агар бонк ҳар сол амонатпулии мизочонашро 3%-и зиёд кунад, он гоҳ 1800 сомонӣ пули гузошташуда баъди чор сол чанд сомони ро ташкил медиҳад?

Маиққо барои тақрир

464. Муодиларо ҳал кунед:

- а) $(x-9)(x+11)=0$; б) $0,2x^2-5=0$; в) $x^2-17x+16=0$.

465. Ҷадвалро пур кунед:

x	-3	-2	-0,2	0	$\frac{2}{3}$	1	3,1	6	10
x^2									
$\frac{x^2}{x+1}$									

466. Касрхоро ихтисор кунед:

а) $\frac{a^6-b^6}{a^3-b^3}$;

б) $\frac{6c^2-6cn}{12cn-12n^2}$;

в) $\frac{mn}{m^2n-n^2m}$.

467. Корхона барои таъмини мунтазами истехсолот ҳар рӯз 0,5 т сӯзишворӣ истифода мебарад. Дар ин ҳолат захираи сӯзишворӣ ба 120 рӯз мерасад. Агар корхона ҳар рӯз 0,3 т сӯзишворӣ истифода барад, он гоҳ захира ба чанд рӯз мерасад?

468. Масъалае тартиб диҳед, ки матнаш ба ҳалли муодилаи

$$x \cdot (x+16) = 7680$$

меорад.

469. Нуқтаи буриши параболаи $y=2x^2-3x+8$ -ро бо тири Oy ёбед.

470. Самти равиши шохаҳои параболаро муайян намоед:

а) $y=0,2x^2-3y+11$;

в) $y=-4x^2-\frac{2x}{3}+\frac{3}{8}$;

б) $y=-3x^2+0,3x+0,2$;

г) $y=x^2-15x$;

471. Суммаи $a^{2000} + \frac{1}{a^{2000}}$ -ро ҳисоб кунед, агар $a^2 - a + 1 = 0$ бошад.

472. Системаро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} 5xy + 3x^2 = 57, \\ 15xy - x^2 = 81, \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = b. \end{cases}$

27. Формулаи суммаи n аъзои аввалии прогрессияи геометрӣ

Шарҳи мақсади асосиро аз ҳалли мисол сар мекунем. Бо ин мақсад дар назди худ масъалаи ёфтани суммаи

$$1+2+2^2+\dots+2^{63}$$

-ро мегузорем.* Суммаи болоиро бо S ишорат карда, баъди ба 2 зарб кардану фарқи $2S-S$ -ро тартиб додан, ҳосил мекунем:

$$2S-S=(2+2^2+2^3+\dots+2^{64})-(1+2+2^2+\dots+2^{63})=2^{64}-1.$$

Яъне $S=2^{64}-1$. Ҳисоб карда шудааст, ки $2^{64}-1$ ба 18446744073709551615 баробар аст.

Тарзи ҳалли масъалаи дар боло зикршуда ба ёфтани суммаи n -аъзои аввали прогрессияи геометрии (b_n) , ки маҳраҷаш q аст, имконият медиҳад. Ба ибораи дигар, дар асоси мулоҳизаҳои болоӣ суммаи

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n \quad (1)$$

-ро ёфтан мумкин аст. Ҳар ду қисми (1)-ро бо q зарб зада,

* Хонанда ривояти ба ин сумма вобастаро, ки дар шарҳавии солшумории мо чун масъала - қиссаи ихтироъкори шохмот дар байни мардум маъруф буд, аз қисми «Маълумоти таърихӣ» ёфта метавонад.

$$q \cdot Sn = b_1 q + b_2 q + b_3 q + \dots + b_{n-1} \cdot q + b_n \cdot q = \\ = b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_n + b_n \cdot q$$

ё

$$q \cdot Sn = b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_n \cdot q$$

-ро ҳосил мекунем. Аз баробарҳои (1) ва (2) истифода бурда, фарқи $q \cdot S_n - S_n$ -ро тартиб медиҳем:

$$S_n \cdot q - S_n = (b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_n + b_n \cdot q) - (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n) = \\ = b_n \cdot q - b_1$$

Инак, $S_n \cdot q - S_n = (b_n \cdot q - b_1)$ Аз ин баробарӣ ҳангоми $q \neq 1$ будан, меёбем:

$$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1} \quad (3)$$

Формулаи (3) суммаи n аъзои аввалии прогрессияи геометрии (1)-ро ифода мекунад. Агар $q=1$ бошад (ҳамаи аъзои прогрессия ба аъзои аввала баробаранд), он гоҳ аз (1)

$$S_n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^{n-1} = \underbrace{b_1 + b_1 + b_1 + \dots + b_1}_{n\text{-то}} = n \cdot b_1$$

ҳосил мешавад.

Дар ҳалли масъалаҳое, ки маълумҳояш аъзои якум ва маҳраҷи прогрессияро дарбар мегиранд, қулай аст, ки аз формулаи

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \quad (3)$$

истифода барем. Формулаи (4) баъди ба ҷойи b_n гузоштани $b_1 \cdot q^{n-1}$ ҳосил мегардад (ниг. ба формулаи (1)-и п. 26).

Мисоли 1. Суммаи нӯҳ аъзои аввалии прогрессияи геометрии, ки барояш $b_1 = 2$ ва $q = \frac{1}{3}$ аст, меёбем.

Дар ин ҷо қулай аст, ки аз формулаи (4) истифода барем:

$$S_9 = \frac{2 \left[\left(\frac{1}{3} \right)^9 - 1 \right]}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{19683} - 1 \right)}{-\frac{2}{3}} = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{19683} \right) = \\ = 3 \cdot \frac{19682}{19683} = \frac{19682}{6561} = 2 \frac{6551}{6561}, \quad S_9 = 2 \frac{6551}{6561}.$$

Мисоли 2. Агар $q=2$ ва $b_{10}=2560$ бошад, он гоҳ суммаи даҳ аъзои аввалии прогрессияи геометрии меёбем.

Фаҳмост, ки $b_{10}=b_1 \cdot q^9$, $2560=b_1 \cdot 2^9$, $2560=512 \cdot b_1$, $b_1=5$ аст.

Пас, аз рӯи формулаи (3) суммаи матлуб ба

$$S_{10} = \frac{b_{10} \cdot q - b_1}{q - 1} = \frac{2560 \cdot 2 - 5}{2 - 1} = 5120 - 5 = 5115.$$

баробар мешавад.

Ҷавоб: $S_{10} = 5115$.

М и с о л и 3. Суммаи ҳашт аъзои аввалаи прогрессияи геометриро меёбем, агар $b_5=3125$ ва $b_7=78125$ бошанд.

Дар ин ҷо ифодакунии b_7 ба воситаи b_5 кулай мебошад:
 $B_7 = b_5 \cdot q = b_5 \cdot q^2$. Аз ин баробарӣ аввал q^2 ва баъд q -ро меёбем:

$$q^2 = \frac{b_7}{b_5} = \frac{78125}{3125} = 25, \quad q = \pm 5.$$

Натиҷаи охирин мавҷудияти ду прогрессияро ифода мекунад, ки шартӣ масъаларо қаноат менамоянд.

$$\text{Бигзор, } q=5 \text{ бошад, он гоҳ } b_1 = \frac{b_5}{q^4} = \frac{3125}{625} = 5,$$

$$\text{ва } S_8 = \frac{b_8 \cdot q - b_1}{q - 1} = \frac{b_7 \cdot q^2 - b_1}{q - 1} = \frac{78125 \cdot 25 - 5}{5 - 1} = \frac{1953125 - 5}{4} = \frac{1953120}{4} = 488280$$

мешавад.

Акнун, ба ҷойи q адади -5 -ро мегузорем. Дар ин ҳолат суммаи матлуб (аз формулаи (4) истифода мебарем) ба

$$S_8 = \frac{b_1 \cdot (q^8 - 1)}{q - 1} = \frac{5[(-5)^8 - 1]}{-5 - 1} = \frac{5 \cdot (390625 - 1)}{-6} = 5 \cdot (-65104) = -325520$$

баробар мешавад.

М и с о л и 4. Суммаи аъзои пайдарпайии $1; x; x^2; \dots, x^{n-1} (x \neq 1)$ -ро меёбем.

Дар ҳақиқат, ҷамъшавандаҳои суммаи $1+x+x^2+\dots+x^{n-1} (x \neq 1)$ аъзоҳои пайдарпайии $1; x, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}$ мебошанд. Ин пайдарпайӣ бошад, прогрессияи геометриро бо додашудаҳои $b_1=1, q=x$ ва $b_n=x^{n-1}$ ифода мекунад. Аз ин рӯ, ҳалли масъала бо ёфтани суммаи n -аъзои аввалаи прогрессияи (x_n) оварда мешавад. Мувофиқи (3)

$$S_n = \frac{x^{n-1} \cdot x - 1}{x - 1} = \frac{x^n - 1}{x - 1} \text{ ё } 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1} \quad (x \neq 1)$$

мешавад. Аз баробарии охирин якчанд формулаи маълумро ҳосил кардан мумкин аст. Бо ин мақсад ду тарафи онро ба $x-1$ зарб мекунем:

$$x^n - 1 = (x - 1)(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) \quad (5)$$

Ба ҷойи n най дар най қиматҳои 2 ва 3-ро мегузорем, он гоҳ ҳангоми $n=2$ будан,

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

ва ҳангоми $n=3$ будан,

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

-ро ҳосил мекунем, ки онҳо формулаҳои зарби мухтасаранд.

Зарурияти дар оянда истифодабарии формулаҳои зеринро ба ҳисоб гирифта, онҳоро пешниҳод менамоем:

$$x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1), \quad (n=4)$$

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1), \quad (n=5)$$

$$x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1), \quad (n=6)$$

Мисоли 5. Дар прогрессияи геометрӣ панҷ аъзо ҳаст. Суммаи он бе аъзои якум ба 19,5 ва бе аъзои охирин ба 13 баробар аст. Аъзои канориҳо меёбем.

Ҳал. Аз рӯйи додашудаҳои масъала ифодаҳои

$$b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 19,5$$

ва

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 13$$

-ро навиштан мумкин аст. Агар ду тарафи баробарии дуюмро бо q зарб кунем, он гоҳ дар тарафи чап суммаи ба тарафи чапи баробарии якум баробарро ҳосил мекунем:

$$q \cdot (b_1 + b_2 + b_3 + b_4) = 13 \cdot q; \quad b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 13q;$$

$$19,5 = 13q; \quad q = 19,5 : 13; \quad q = 1,5.$$

Аз тарафи дигар, аз $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 13$ формулаи (4) -ро пайдо мекунем:

$$\frac{b_1 \cdot (q^4 - 1)}{q - 1} = 13; \quad \frac{b_1 \cdot (1,5^4 - 1)}{1,5 - 1} = 13; \quad b_1 \cdot (5,0625 - 1) = 13 \cdot 0,5;$$

$$b_1 \cdot 4,0625 = 6,5; \quad b_1 = 6,5 : 4,0625; \quad b_1 = 1,6;$$

Акнун, аз формулаи $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ аъзои панҷумро меёбем:

$$b_5 = b_1 \cdot q^4 = 1,6 \cdot 1,5^4 = 1,6 \cdot 5,0625 = 8,1.$$

Ҷавоб: $b_1 = 1,6$; $b_5 = 8,1$.

Мисоли 6. Суммаи ду адад ба 30 ва ҳосили зарбашон ба 144 баробар аст. Ин ададҳо аъзои аввалии прогрессияи геометрии маҳраҷан $q > 1$ мебошанд. Суммаи ҳафт аъзои прогрессияро меёбем.

Ҳал. Прогрессияи геометрии бо (b_n) ишорат мекунем. Он гоҳ $b_1 + b_2 = 30$ ва $b_1 \cdot b_2 = 144$ мешавад.

Аз системаи $\begin{cases} b_1 + b_2 = 30, \\ b_1 \cdot b_2 = 144; \end{cases}$ b_1 ва q -ро меёбем.

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 30, \\ b_1 \cdot b_2 = 144; \end{cases} \quad \begin{cases} b_2 = 30 - b_1, \\ b_1 \cdot (30 - b_1) = 144; \end{cases} \quad \begin{cases} b_2 = 30 - b_1, \\ b_1^2 - 30b_1 + 144 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1' = 6, b_1'' = 24, \\ b_2' = 24, b_2'' = 6. \end{cases}$$

Ҳамин тариқ, ду прогрессия

$$6; 24; 96; 288; \dots$$

$$24; 6; \frac{6}{4}; \frac{6}{16}; \dots$$

ҳосил мешаванд, ки маҳраҷи якумаш $q = 24 : 6 = 4 > 1$ ва дуюмаш $q = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} < 1$ аст. Аз ин рӯ, прогрессияи дуюмро аз эътибор соқит намуда, барои якумаш аввал $b_7 = b_1 \cdot q^6 = 6 \cdot 4^6 = 24576$ ва баъд S_7 -ро аз рӯйи формулаи (3) меёбем:

$$S_7 = \frac{b_7 \cdot q - b_1}{q - 1} = \frac{24576 \cdot 4 - 6}{4 - 1} = \frac{98298}{3} = 32766.$$

?

1. Формулаи суммаи n аъзои аввали прогрессияи геометриро номбар кунед. 2. Агар махраҷи прогрессияи геометрӣ ба 1 баробар бошад, он гоҳ суммаи n аъзои аввалааш чанд аст?

473. Прогрессияи геометрии

- а) 2, 1; -4, 2; ... г) -2; -8; ... е) 64; -16;
 б) 36; 54; ... г) -16; -32; ё) -3; 3²; ...
 в) -1; $\frac{1}{3}$; ... д) 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; ...

дода шудааст. Суммаи чор аъзои аввалаи онро ёбед.

474. Аз рӯйи додашудаҳо суммаҳои нишондодашудаи прогрессияи геометрии ёбед:

- а) $b_2 = 8, q = \frac{1}{2}, S_6$ -?; г) $c_1 = -1, q = 2, S_4$ -?;
 б) $b_1 = 500, q = \frac{1}{5}, S_7$ -?; г) $c_1 = 4, q = -\frac{3}{2}, S_5$ -?;
 в) $c_1 = -4, q = -3, S_8$ -?; д) $x_1 = 5,5, q = 0,55, S_3$ -?;

475. Нишон диҳед, ки пайдарпайии (b_n) прогрессияи геометрӣ аст. Суммаи n аъзои аввалини онро ёбед.

- а) $b_2 = 9 \cdot 2 \cdot 3^n$; в) $b_n = 4^{n+1}$; г) $b_n = 4 \cdot 7^n$;
 б) $b_n = 8 \cdot 2^{n-1}$; г) $b_n = 0,1 \cdot 4^n$; д) $b_n = 2 \cdot 3^n$.

476. Суммаи n аъзои аввалини прогрессияи геометриро ёбед:

- а) 1; 3²; 3⁴; ...; е) $x^2; 1; \frac{1}{x^2}; \dots, (x \neq 0, x \neq \pm 1)$;
 б) 2²; 2³; 2⁴; ...; ё) 5; 5; 5; ...;
 в) $-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; \dots$; ж) 1; -2; 4; ...;
 г) 1; - x ; x^2 ; ...; ($x \neq -1$); з) 1; 2 x ; 4 x^2 ; ...; ($x \neq \frac{1}{2}$);
 г) 1; x^2 ; x^4 ; ...; ($x \neq \pm 1$); и) 1, 2; -3, 6; 10, 8; ...
 д) 1; x^3 ; x^6 ; ...; ($x \neq -1$);

477. Прогрессияи геометрии (b_n) дода шудааст. Агар:

- а) $b_5 = 32,4, q = 1,5$ бошад, S_6 -ро;
 б) $b_7 = \frac{64}{81}, q = \frac{2}{3}$ бошад, S_7 -ро;
 в) $b_3 = 10, q = \frac{1}{3}$ бошад, S_4 -ро;
 г) $b_5 = -364,5, q = -3$ бошад, S_5 -ро ёбед.

478. Суммаи n аъзои прогрессияи геометриро ёбед, ки дар он:

- а) $a_1 = 2, q = 2, n = 5$; б) $a_1 = 0,5, q = 3, n = 4$
 бошад.

479. Махрач ва суммаи n аъзои прогрессияи геометриро ёбед, агар
 а) $a_1=2, n=7; a_n=1458$; б) $a_1=76\frac{4}{5}, n=6; a_n=-\frac{12}{5}$
 бошад.
480. Аъзои якум ва суммаи n аъзои прогрессияи геометриро ёбед, агар
 а) $q=1\frac{1}{2}, n=6, a_n=2\frac{17}{32}$; б) $q=4; n=8, a_n=49152$
 бошад.
481. Аъзои аввала ва охиринаи прогрессияи геометриро ёбед, агар
 а) $n=9, q=2, S_n=1533$; б) $n=12, q=2, S_n=4095$;
482. Дар прогрессияи геометрии аъзохояш мусбати (b_n) $b_3=18$ ва $b_7=1458$ аст. Суммаи дах аъзои аввалаи онро ёбед.
483. Суммаи аъзои прогрессияи геометрии 1; $b_2; b_3; b_4; b_5; b_6$; 4096 -ро ёбед.
484. Чор ададери ёбед, ки прогрессияи геометриро бо махрачи $q>1$ ташкил диҳаду суммаи аъзои канориаш ба 35 ва суммаи ду аъзои боқимондааш ба 30 баробар бошад. Дар ҷавоб панҷяки суммашонро нависед.
485. Суммаи се аъзои аввалаи прогрессияи геометрӣ ба 28 ва суммаи се аъзои пасояндааш (яъне $b_4; b_5$ ва b_6) ба 3,5 баробар аст. Аъзои дуҷоми прогрессияро ёбед.
486. Суммаи прогрессияи геометрияро ёбед, ки он аз ҳафт аъзо иборат буда, суммаи се аъзои аввалааш ба 26 ва се аъзои охиринаш ба 2106 баробар шавад.
487. Фарқи байни аъзои дуҷум ва якуми прогрессияи геометрӣ $(b_n>0)$ ба 20, фарқи байни аъзои чоруму якум бошад ба 140 баробар аст. Суммаи шаш аъзои аввалаи прогрессияро ёбед.

Машиқҳо барои тақрор

488. Се бригадаи коргарон дар як баст (смена) 104 детал тайёр карданд. Деталҳои бригадаи якум назар ба дуҷум 12-то камтар аст. Деталҳои тайёркардаи бригадаи сеҷум бошад, $\frac{5}{8}$ ҳиссаи шумораи умумии деталҳои бригадаҳои якум ва дуҷумро ташкил медиҳад. Ҳар як бригада чанддеталӣ тайёр кардааст?
489. Дар шакли бисёраъзогии стандартӣ нависед:
 а) $2x \cdot (x^2-7x-3)+7$; г) $3y^2-2y \cdot (5+1, 5y)+5$;
 б) $4b^2 \cdot (5b^2-3b+2)+2$; г) $6x^2-3x\left(2x-\frac{2}{3}\right)+1$;
 в) $(y^2-1,4y+6) \cdot 1,5y-3$; д) $7b \cdot (4c-b)+4c \cdot (c-7b)$.
490. Бо ёрии формулаҳои $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ қимати:
 а) 61^2 ; б) 999^2 ; в) $9,9^2$; г) 199^2 ; д) 702^2 ; е) $10,2^2$
 -ро ёбед.

491. Нишон диҳед, ки баробар аст.

$$\text{а) } \frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} + \frac{7}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} \text{ ба } \sqrt{7} + \sqrt{6}; \quad \text{б) } \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} \text{ ба } \sqrt{7} + \sqrt{5}$$

492. Ҳамаи қиматҳои a ва b -ро, ки барояшон системаи

$$\begin{cases} (1+a) \cdot x + (a+b) \cdot y = b-a, \\ (5+a) \cdot x + 2(a+b) \cdot y = b-1 \end{cases}$$

ҳал надорад, ёбед.

493. Нобаробарии

$$\frac{2x+2}{7} - \frac{4x-3}{2} < \frac{2+13x}{14} - 1$$

-ро ҳал кунед.

494. Ифодаро ба намуди ҳосили зарб нависед:

$$\text{а) } 2^{n+4}-2^n; \quad \text{б) } 4^{n+1}-4^{n-1}; \quad \text{в) } 5^{2n}+5^n.$$

495. Фосилаи афзуншавӣ ва камшавии функсияро ёбед:

$$\text{а) } y = -2x^2 + x; \quad \text{б) } y = 3x^2 + 6x - 15.$$

496. Экстремуми функсияи $y = -2x^2 + 4x - 6$ -ро ёбед.

497. Қатори тезгарад бо сабабҳои техникӣ 16 дақиқа боздошта шуд. Бо мақсади сари вақт ба нуқтаи зарурӣ расидан қатора 80 км-ро бо суръати нисбат ба аввала 10 км/соат зиёдтар тай кард. Суръати аввали қаторро ёбед.

28. Суммаи прогрессияи геометрии беохири камшаванда

Дар пунктҳои 25-27 мо ба таърифи прогрессияи геометрӣ, ёфтани аъзои n -ум ва суммаи n аъзои аввалааш шинос шудем. Дар он ҳолатҳо мо ягон маротиба ба табиати афзуншавандагӣ ва камшавандагӣ (ин мафҳумҳо аз мавзӯҳои ба прогрессияи арифметикӣ бахшидашуда шиносанд) мисолҳои прогрессияҳои геометрии омӯхтамон диққат надода будем. Дар ин мавзӯ ба як синфи прогрессияҳо - прогрессияҳои геометрии беохири камшаванда, ки қариб дар тамоми соҳаҳо татбиқи худро ёфтааст, шинос шуда, кӯшиши ёфтани суммаи аъзои онро мекунем.

Таъриф. Агар маҳраҷи прогрессияи геометрии

$$(b_n) \quad b_1; b_2; b_3; b_4; \dots; b_n; \dots$$

шарти $|q| < 1$ -ро қаноат намояд, онро прогрессияи геометрии беохири камшаванда меноманд.

Масалан,

$$1; \frac{1}{7}; \frac{1}{7^2}; \frac{1}{7^3}; \dots; \frac{1}{7^{n-1}}; \dots$$

прогрессияи геометрии беохири камшаванда мешавад, чунки

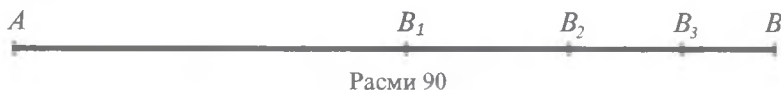
$$q = \frac{1}{7} < 1 \text{ аст.}$$

Пайдарпайии

$$-1; \frac{1}{6}; -\frac{1}{6^2}; \frac{1}{6^3}; -\frac{1}{6^4}; \dots$$

низ прогрессияи геометрии беохири камшаванда шуда метавонад, чунки барояш шарт $|q| = \left| -\frac{1}{6} \right| = \frac{1}{6} < 1$ иҷро мешавад.

Акнун, гузориш ва шарҳи масъаларо аз масъалаи геометрии зерин сар мекунем. Дар расм (ниг. ба расми 90) порчаи дарозиаиш ба 1 воҳид баробари



AB дода шудааст. Бо B_1 миёнаҳои порчаи AB , бо B_2 - миёнаҳои порчаи B_1B , бо B_3 - миёнаҳои порчаи B_2B -ро ишорат мекунем. Амалиётро ҳамин тавр давом дода, дарозии порчаҳои AB_1 , B_1B_2 , B_2B_3 ва ғайраро ҳосил мекунем, ки он прогрессияи геометрии беохирро бо маҳраҷи $q = \frac{1}{2}$ ташкил медиҳал:

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \dots \quad (1)$$

Аз формулаи (4)-и п. 27 суммаи n аъзои аввалинашро мсёбем:

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^n - 1}{-1} = 1 - \frac{1}{2^n}, \quad S_n = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Маълум аст, ки

$$\text{агар } n=5 \text{ бошад, он гоҳ } \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32};$$

$$\text{агар } n=15 \text{ бошад, он гоҳ } \frac{1}{2^{15}} = \frac{1}{32768};$$

$$\text{агар } n=25 \text{ бошад, он гоҳ } \frac{1}{2^{25}} = \frac{1}{34834432}$$

мешавад.

Ададҳои ҳосилшудаи $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{32768}$ ва $\frac{1}{34834432}$ аз он шаҳодат медиҳанд, ки бо зиёд шудани шумораи ҷамъшавандаҳо қимати касри $\frac{1}{2^n}$ хеле хурд шуда, ба нул майл мекунад. Бинобар ин, ҳангоми беохир зиёд шудани n фарқи $1 - \frac{1}{2^n}$ ба адади 1 хеле наздик мешавад ва ё ба он майл мекунад. Дар ин ҳолат адади 1-ро суммаи

прогрессияи геометрии беохир камшавандаи (1) номида, чунин менависанд:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$$

Суммаи дарозии порчаҳои $AB_1, B_1B_2, B_2B_3, \dots$ ба дарозии порчаи AB баробар аст. Ин аст маънои геометрии масъалаи халкардамон*. Барои прогрессияи геометрии дилхохи

$$b_1; b_1 \cdot q; b_1 \cdot q^2; b_1 \cdot q^3; \dots$$

шарти $|q| < 1$ -ро қонёгардонанда суммаи n аъзои аввалаапро меёбем:

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1 \cdot q^n - b_1}{q - 1} = \frac{b_1 - b_1 \cdot q^n}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n,$$

$$S_n = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n.$$

Хангоми $|q| < 1$ будан ва беохир зиёд шудани аъзои прогрессия зарбкунандаи q^n ва аз ин ҳосили зарби $\frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n$ ҳам ба 0 наздик мешавад (инро мо бевосита хангоми ёфтани суммаи аъзои пайдарпайии мушаххаси (1) мушохида карда будем). Ин бошад, ба хулосаи он ки $S_n \approx \frac{b_1}{1 - q}$ ** ё адади $\frac{b_1}{1 - q}$ ба суммаи прогрессияи геометрии беохир камшавандаи (b_n) бо махрачи $|q| < 1$ баробар аст, меорад.

Инро дар шакли

$$b_1 + b_1 \cdot q + b_1 q^2 + \dots = \frac{b_1}{1 - q}$$

навишта, баъди тарафи чапро бо S ишорат намудан, формулаи

$$S = \frac{b_1}{1 - q} \quad (2)$$

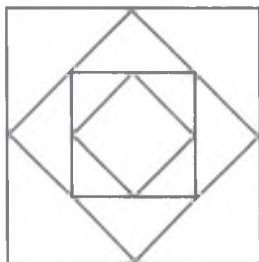
-ро ҳосил мекунем.

Хангоми дар прогрессия $|q| > 1$ будан, бо афзудани n суммаи аъзояш ба ягон адад наздик намешаванд. Дар ин ҳолат мегӯянд, ки прогрессия сумма надорад.

Дар поён якчанд мисол меорем, ки бо ёрии формулаи (2) ҳал мешаванд.

* Агар дар шарти масъала дарозии порчаи AB -ро ба 2 воҳид баробар мегирифтем, он гоҳ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$ ҳосил мекардем.

** Бо афзудани n суммаи S_n ба $\frac{b_1}{1 - q}$ майл дорад.



Расми 91

Мисоли 1. Квадрати тарафаш a см дода шудааст. Миёнаҳои тарафҳои он куллаҳои квадрати дуюм, миёнаҳои квадрати дуюм куллаҳои квадрати сеюм ва ғайра мебошанд (расми 91). Суммаи масоҳати ҳамаи квадратҳоро меёбем.

Ҳа л. Аз масъала намоён аст, ки масоҳати ҳар як квадрати пасоянд ба нисфи масоҳати квадрати пешоянд баробар аст. Пайдарпайии масоҳати квадратҳо прогрессияи геометрии бо $b_1 = a^2$ ва $q = \frac{1}{2} < 1$ ифода мекунад, ки

суммаашон ба

$$S = a^2 : (1 - \frac{1}{2}) = a^2 : \frac{1}{2} = a^2 \cdot 2 = 2a^2$$

баробар аст. Ҳамин тарик, ба $2a^2$ (см²) баробар будани суммаи масоҳатҳои ҳамаи квадратҳоро ҳосил мекунем.

Пеш аз ҳалли мисоли навбатӣ қайд мекунем, ки ҳар як адади ратсионалиро ба намуди касри даврии даҳии беохир ифода кардан мумкин аст. Адади ратсионалии $\frac{m}{n}$ (m -адади бутун ва n -адади натуралӣ)-ро бо роҳи тақсимкунии сурут ба махраҷ ба намуди касри даҳии беохир меоранд. Баръакс, ҳар як касри даҳии даврии беохир адади ратсионалиро ифода мекунад. Ин ду маълумоти мухтасар ба мо аз синфи ҳаштум маълум аст. Бо ёрии суммаи прогрессияи геометрии беохирӣ камшаванда нишон додан мумкин аст, ки касри даврии беохирро ба намуди $\frac{m}{n}$ овардан мумкин аст.

Дар синфи 8 (ниг. ба боби 2, §4, п. 11) ҳангоми касри давриро ба касри ратсионалӣ гардонидан аз қоидаи зерин истифода мекардем: «Аз адади то даври дуюм буда, адади то даври якум бударо тарҳ карда, дар сурут менависем. Дар махраҷ бошад, ҳамон миқдор 9 менависем, ки ба шумораи рақамҳои давр баробар бошад. Ба он ҳамон миқдор нул илова мекунем, ки он ба миқдори рақамҳои то давр буда баробар аст».

Акнун, ин қоидаро дар мисоли касрҳои даврии даврашон аз ду адад иборат асоснок мекунем. Бигзор, $A=0, \overline{abc}(\overline{df})$ чунин каср аст. Азбаски $A=0, \overline{abc} + 0,000(\overline{df})$ мебошад, пас қифоя аст, ки тарзи баргардонидани касри $B=0, (\overline{df})$ -ро нишон диҳем. Мувофиқи таъриф

$$B=0, (\overline{df})=0, df+0,00df+0,0000df+0,000000df+...$$

мешавад, ки он суммаи беохирро ифода мекунад.

Тафтиши бевосита шаҳодати он аст, ки суммаи мазкур прогрессияи геометрии беохир камшавандаро бо маҳраҷи $q=0,01$ ташқил медиҳад.

Аз ин ҷо, дар асоси формулаи (2) ҳосил мекунем:

$$B = 0, (\overline{df}) = \frac{0, df}{1 - 0,01} = \frac{0, df}{0,99} = \frac{df}{99}.$$

Н а т и ҷ а. Касри даврии беохири даҳии дилҳоҳро бо ҳамин тарз дар шакли касри одӣ навиштан мумкин аст.

М и с о л и 2. Касри даврии даҳии беохири $0,(81)$ -ро ба намуди касри одӣ менависем.

Маълум аст, ки ин адад суммаи беохири ($\overline{df}=81$)

$$0,81+0,0081+0,000081+0,00000081+\dots$$

мебошад. Аъзоҳои сумма прогрессияи геометрии беохир камшавандаро, ки дар он $b_1=0,81$ ва $q=0,01 < 1$ аст, ифода мекунанд. Пас, ин сумма ба

$$S = \frac{81}{99} = \frac{9}{11}, \text{ яъне } 0,(81) = \frac{9}{11}$$

баробар мешавад.

М и с о л и 3. Суммаи прогрессияи беохири камшавандаро меёбем, агар суммаи аъзои якуму чорум ба 54 ва дуяму сеюм ба 36 баробар бошад.

Ҳ а л. Дар асоси шартӣ масъала системаи

$$\begin{cases} b_1 + b_4 = 54, \\ b_2 + b_3 = 36 \end{cases}$$

-ро доро ҳастем, ки он бо осонӣ ба шакли

$$\begin{cases} b_1 \cdot (1 + q^3) = 54, \\ b_1 \cdot q \cdot (1 + q) = 36 \end{cases}$$

оварда мешавад. Муодилаи якумро ба дуҷум тақсим карда, ҳосил мекунем:

$$\frac{1 - q + q^2}{q} = \frac{3}{2} \text{ ё } 2q^2 - 5q + 2 = 0.$$

Азбаски шартӣ мисол ёфтани суммаи прогрессияи геометрии беохири камшавандаро тақозо мекунад, пас аз байни решаҳои муодилаи квадратии охириин, ки $q_1 = 2$ ва $q = \frac{1}{2}$ мебошанд, $q = \frac{1}{2} < 1$ -ро мегирем. Қимати интиҳобкардаи q -ро ба муодилаи дилҳоҳи система гузошта, $b_1=48$ -ро ҳосил мекунем. Аз рӯи қиматҳои маълуми b_1 ва q суммаи матлубро меёбем:

$$S = \frac{48}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{48}{\frac{1}{2}} = 96, \quad S = 96$$

Мисоли 4. Суммаи прогрессияи геометрии беохирӣ

$$25; -5; 1; -\frac{1}{5}; \frac{1}{25}; -\frac{1}{125}; \dots$$

-ро ҳисоб мекунем.

Маълум аст, ки маҳраҷи прогрессия $q = -\frac{1}{5}$ аст. Пас, прогрессия камшаванда будааст. $b_1=25$ буданаширо ба назар гирифта, аз рӯи формулаи (2) ҳосил мекунем:

$$S = \frac{25}{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{25}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{25}{\frac{6}{5}} = \frac{25 \cdot 5}{6} = \frac{125}{6}.$$

Яъне, $25 - 5 + 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \dots = \frac{125}{6}$ мешавад.

?

1. Прогрессияи геометрии беохирӣ камшаванда чист? 2. Дар кадом ҳолат аз формулаи $S_n = \frac{b_1 - b_n}{1-q} \cdot q^n$ формулаи $S_n \approx \frac{b_1}{1-q}$ -ро ҳосил мекунанд? 3. Оё бо ёрии прогрессияи геометрии беохирӣ камшаванда касри дахӣи даврии беохирро ба намуди касри одӣ овардан мумкин аст? Мисолҳо оред.

498. Иҷрои шартӣ $|q| < 1$ -ро барои прогрессияи геометрии зерин санҷида, суммаашро ёбед:

а) $27; 9; 3; 1; \dots$;

е) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}; \frac{1}{2-\sqrt{2}}; \frac{1}{2}; \dots$;

б) $-8; 2; -\frac{1}{2}; \frac{1}{8}; \dots$;

ё) $\sqrt{3}(\sqrt{3}-2); \frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}; \dots$;

в) $4; \frac{4}{5}; \frac{4}{25}; \frac{4}{125}; \dots$;

ж) $\frac{2}{3}; -\frac{2}{3^2}; \frac{2}{3^3}; -\frac{2}{3^4}; \dots$;

г) $-3; \sqrt{3}; -1; \frac{1}{\sqrt{3}}; \dots$;

з) $16; 4; 1; \frac{1}{4}; \dots$;

ғ) $4\sqrt{2}; 2; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{4}; \dots$;

и) $-6; -2; -\frac{2}{3}; \dots$;

д) $15; 3\sqrt{5}; 3; \frac{3\sqrt{5}}{5}; \dots$;

к) $5; -1; \frac{1}{5}; -\frac{1}{5^2}; \dots$.

499. Суммаи прогрессияи геометрии беохирро ёбед:

а) $-24; 6; -\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \dots$;

в) $\frac{1}{a}; 1; a; a^2; \dots (|a| < 1, a \neq 0)$;

б) $-1; \frac{2}{3}; -\frac{4}{9}; \frac{8}{27}; \dots$;

г) $-\frac{1}{a}; 1; -a; a^2; \dots (|a| < 1, a \neq 0)$;

500. Суммахоро ёбед:

а) $1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \dots$;

г) $5 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \dots$;

б) $-\frac{1}{a^2} + a - a^4 + a^7 - a^{10} + \dots$ ($|a| < 1, a \neq 0$); г) $12 + 8 + \frac{16}{3} + \frac{32}{9} + \dots$;

в) $1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{64} + \dots$;

е) $1 - \frac{1}{11} + \frac{1}{121} - \frac{1}{1331} + \dots$.

501. Суммаи прогрессияи геометрии беохири камшавандаи аъзояш мусбатро ёбед, агар аъзои якумаш ба 4 ва фарқи байни аъзои сёюму панҷумаш ба $\frac{32}{81}$ баробар бошад.

502. Суммаи аъзои прогрессияи геометрии беохири камшаванда ба 56, суммаи квадратҳои аъзои ҳамаи прогрессия ба 448 баробар аст. Аъзои якум ва маҳраҷи прогрессияро ёбед.

503. Прогрессияи геометрии беохири (b_n) -ро бо маҳраҷи $|q| < 1$ ёбед, агар аъзои дуюмаш ба 6 ва суммааш ба ҳаштҷаки суммаи квадратҳои аъзоҳояш баробар бошад. Дар ҷавоб (агар прогрессия мавҷуд бошад) се аъзои аввалашро нависед.

504. Дар дохили давраи радиусаш ба R см баробар секунҷаи мунтазам чунон кашида шудааст, ки қуллаҳояш дар давра меҳобанд. Дар дохили секунҷаи мунтазам бошад, давраи дарункашидашудаи секунҷа сохта шудааст. Дар дохили давраи дарункашидашуда боз секунҷаи нави мунтазами қуллаҳояш дар давра воқеъгардида кашида шудааст ва ин амал беохир давом мекунад. Суммаи дарозии давраҳо ва масоҳати доираҳоро ёбед.

505. Дар дохили квадрат доираи дарункашидашуда сохта шудааст, дар дохили доира бошад, квадрати нави қуллаҳояшро дарбаргиранда кашида шудааст. Дар дохили квадрати дуҷум боз доираи дарункашидашуда сохта шудааст ва ҳамаин тавр протсесс давом мекунад. Агар дарозии тарафи квадрати якум ба b см баробар бошад, он гоҳ суммаи масоҳатҳои ҳамаи доираҳо ба чанд баробар мешавад?

506. Маҳраҷи прогрессияи геометрии беохир камшавандаро, ки аъзои якумаш ба 2 ва сечанди суммааш ба 10 баробар аст, ёбед.

507. Аъзои панҷуми прогрессияи геометрии беохири камшавандаро ёбед, агар маҳраҷаш ба $\frac{1}{8}$ ва суммааш ба $3\frac{3}{7}$ баробар бошад.

508. Суммаи прогрессияи геометрии камшавандаи беохир ба 25 ва суммаи ду аъзои аввалааш ба 9 баробар аст. Прогрессияро ёбед.

509. Ададхоро ба намуди касри одӣ нависед:

- | | | | |
|-------------|---------------|---------------|---------------|
| а) 0, (8); | г) 0,2(3); | ж) 0,4 (6); | к) 0,13 (12); |
| б) 0, (3); | д) 0,82 (45); | з) 0,01 (12); | л) 0,21 (22) |
| в) 0, (26); | е) 0. (5); | и) 0,1 (3); | м) 0,13 (11) |
| г) 2, (71); | ё) 1, (72); | к) 2, (1); | н) 0,2 (52). |

Машқҳо барои тақрор

510. Амалхоро иҷро кунед:

а) $\frac{2y^3+2y^2}{y^4+y^3+y^2} \cdot \frac{y^3+y^2+y}{4y^4+4y^3};$ б) $\frac{2(a^3-b^3)}{3ab(a+b)} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2b+ab^2}.$

511. Иҷбот кунед, ки барои $a>0$ ва $b>0$ нобаробарии

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

ҷой дорад.

512. Маҳраҷро аз радикал озод намоед:

а) $\frac{4}{3-\sqrt{3}};$ б) $\frac{5}{3+\sqrt{3}};$ в) $\frac{6}{5-\sqrt{2}}.$

513. Ҷуфт ва токии функсияҳои зеринро муайян кунед:

а) $f(x)=x^3-3x;$ в) $f(x)=-2(x^4-2x^2+1);$
 б) $f(x)=x^4-8x^2;$ г) $f(x)=x+\frac{5}{x}?$

514. Периметри росткунҷа ба 8 см баробар аст. Масоҳати росткунҷаро чун функсияи тарафаш ифода кунед.

515. Суръати ҳаракати катер ба муқобили ҷараёни оби дарё 20,1 км/соат ва суръати об 1,5 км/соат аст. Суръати катерро дар оби ором ва самти ҷараёни дарё ҳисоб кунед?

516. Графики функсияҳои $y=2x^2-5$ ва $y=2x^2+3x-5$ -ро дар як ҳамвории координатавӣ созед.

517. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $3x^2-7x+4<0;$ б) $-3x^2+27>0.$

§9. БАЎЗЕ ХОСИЯТҲОИ ДИГАРИ ПРОГРЕССИЯҲО.

ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲОИ ҲАР ДУ НАМУДИ ПРОГРЕССИЯҲОРО ДАРБАРГИРАНДА

Бигзор, прогрессияи арифметикии (a_n) ва геометрии (b_n) дода шуда бошанд. Чанд хосияти нави ин прогрессияҳоро меорем.

1 Барои прогрессияи арифметикӣ»

1. Ҳар як аъзои (a_n) ба миёнаи арифметикии ду аъзои дар як ҳел дури ҷойгирбуда баробар аст. Яъне

$$2a_k = a_{k+m} + a_{k-m} \quad (1)$$

ки дар ин чо k ва m ададҳои натуралианд ва $k > m$ аст. Дар ҳақиқат, мувофиқи таърифи прогрессия

$$a_{k+m} = a_1 + d \cdot (k+m-1), \quad a_{k-m} = a_1 + d \cdot (k-m-1),$$

мешавад.

Ин баробариҳоро ҳамчун карда, ҳосил мекунем:

$$a_{k+m} + a_{k-m} = 2a_1 + d \cdot (k+m-1 + k-m-1) = 2a_1 + 2d \cdot (k-1) = 2a_k.$$

2. Агар $k+l=r+s$ бошад, он гоҳ, $a_k + a_l = a_r + a_s$.

Дар ҳақиқат,

$$a_k + a_l = a_1 + d \cdot (k-1) + a_1 + d \cdot (l-1) = 2a_1 + d \cdot (k+l-2),$$

$$a_r + a_s = a_1 + d \cdot (r-1) + a_1 + d \cdot (s-1) = 2a_1 + d \cdot (r+s-2)$$

аст. Ҳангоми $k+l=r+s$ будан, тарафҳои рости ҳар ду баробарӣ яхелаанд. Пас тарафҳои чапи онҳо низ яхела мешаванд.

Барои прогрессияи охирик, масалан, дорои n аъзо, аз шартҳои $l+n=k+(n-k+l)$ дурустии

$$a_k + a_{n-k+l} = a_l + a_n \quad (2)$$

бармеояд.

II. Барои прогрессияи геометрӣ

*

1. Квадрати ҳар як аъзо ба ҳосили зарби ду аъзои аз он дар як хел дури воқеъбуда баробар аст:

$$b_k^2 = b_{k-m} \cdot b_{k+m} \quad (3)$$

ки дар ин чо k, m - ададҳои натуралианд ва $k > m$ аст.

Барои ба дурустии тасдиқоти болоӣ боварӣ ҳосил кардан кофист, ки баробариҳои $b_{k+m} = b_1 \cdot q^{k+m-1}$ ва $b_{k-m} = b_1 \cdot q^{k-m-1}$ -ро мувофиқи таърифи прогрессия навишта, ҳосили зарбашонро ёбем:

$$b_{k-m} \cdot b_{k+m} = b_1^2 \cdot q^{k-m-1} = b_1^2 \cdot q^{2(k-1)} = (b_1 \cdot q^{k-1})^2 = b_k^2$$

2. Агар $k+l=r+s$ бошад, он гоҳ

$$b_k \cdot b_l = b_r \cdot b_s \quad (4)$$

Муқоисаи тарафҳои рости чапи баробариҳои

$$b_k \cdot b_l = b_1 \cdot q^{k-1} \cdot b_1 \cdot q^{l-1} = b_1^2 \cdot q^{k-1+l-1} = b_1^2 \cdot q^{k+l-2},$$

$$b_r \cdot b_s = b_1 \cdot q^{r-1} \cdot b_1 \cdot q^{s-1} = b_1^2 \cdot q^{r-1+s-1} = b_1^2 \cdot q^{r+s-2}$$

дурустии (4)-ро нишон медиҳад.

Барои прогрессияи геометрии охириҳои $b_1; b_2; \dots; b_n$ шартҳои (4) намуди

$$b_k \cdot b_{n-k+l} = b_l \cdot b_n \quad (5)$$

-ро мегирад ($k+(n-k+l)=n+l$).

Қайд мекунем, ки на ҳар гуна пайдарпайии ададӣ, ки дорои хосиятҳои 1 ва 2 аст, прогрессияи арифметикӣ ё геометрӣ шуда метавонанд. Масалан, пайдарпайии

1; 2; 4; 5;

прогрессияи геометрӣ намешавад, гарчанде он шартҳои (3) ва (4)-ро қаноат намоянд.

III. Акнун масъалаҳоеро ҳал мекунем, ки дар матнашон ҳар ду намуи прогрессияҳо вохӯранд.

М а с ъ а л а и 1. Дар прогрессияи арифметикӣ $a_2=14$ ва $a_3=16$ аст. Чунин прогрессияи геометрию меёбем, ки маҳраҷаш ба фарқи прогрессияи арифметикӣ баробар буда, суммаи се аъзои аввалии ҳар ду прогрессия якхела мебошад.

Ҳ а л. Аз рӯи шарт $d=a_3-a_2=16-14=2$, $a_1=14-d=14-2=12$ ва $a_1+a_2+a_3=12+14+16=42$. Аз ин ҷо, барои прогрессияи геометрии матлуб

$$q=2, 42=b_1+b_1 \cdot q+b_1 \cdot q^2=b_1 \cdot (1+q+q^2)=b_1 \cdot (1+2+4)=7b_1.$$

Пас, $b_1=6$.

Инак, (b_n) : 6; 12; 24; ...

М а с ъ а л а и 2. Дар прогрессияи арифметикии (a_n) ва геометрии (b_n) -и мусбат аъзои якум (яъне a_1 ва b_1) ба 3 баробаранд. Аъзоҳои сеюм низ бо ҳам баробаранд ($a_3=b_3$). Ин прогрессияҳоро нависед, агар аъзои дуёми прогрессияи арифметикӣ аз аъзои дуёми прогрессияи геометрӣ 6 воҳид зиёд бошад.

Ҳ а л. 3; $3q$; $3q^2$ аъзои прогрессияи геометрӣ мебошанд. Аз рӯи шарт $a=3$, $a_2=3q+6$. Азбаски $a_3-a_2=a_2-a_1$ аст, пас $a_3=2a_2-a_1=6q+9$. Аъзои сеюми прогрессияи геометрӣ ба $3q^2$ баробар аст. Пас, мувофиқи шарт $6q+9=3q^2$. Аз ин ҷо $3q^2-6q-9=0$. Адади мусбати $q=3$ решаи мусбати ин муодила аст. Ҳамин тариқ, прогрессияҳои

$$(a_n): 3; 15; 27; 39; 51; \dots$$

$$(b_n): 3; 9; 27; 81; 243; \dots$$

ҳалли масъалаанд.

?

1. Нишон диҳед, ки агар аъзои пайдарпайии (a_n) формулаи $2a_k=a_{k+m}+a_{k-m}$ - ро ва пайдарпайии (b_n) формулаи $b_k^2=b_{k-m} \cdot b_{k+m}$ -ро қаноат намоянд, он гоҳ (a_n) - прогрессияи арифметикӣ ва (b_n) - прогрессияи геометрию ташкил медиҳад. 2. Формулаҳои (1), (2), (3) ва (4) барои кадом намуи прогрессияҳо ҷой доранд. 3. Дар мисолҳои мушаххас нишон диҳед, ки иҷрои хосиятҳои дуҷум боиси прогрессия будани пайдарпай намешавад.

518. Дар прогрессияи арифметикӣ бо фарқи бутун 11-то аъзо ҳаст. Аъзои якум ба 24 баробар мебошад. Аъзои якум, панҷум ва ёздаҳум прогрессияи геометрию ташкил медиҳад. Ҳамаи аъзои прогрессияи арифметикиро ёфта, дар ҷавоб суммаашро нависед.

519. * Се адад прогрессияи геометрию ташкил медиҳад. Агар аъзои дуҷумро ба 8 воҳид зиёд кунем, он гоҳ прогрессияи арифметикӣ

- ва агар аъзои сеюми прогрессияи арифметикиро 64 вохид зиёд кунем, боз прогрессияи геометрӣ ҳосил мешавад. Ин ададҳоро ёбед.
520. Суммаи се адад ба 114 баробар аст. Ин ададҳоро ҳамчун се аъзои аввалаи прогрессияи геометрӣ ё ҳамчун аъзои якум, чорум ва биступанҷуми прогрессияи арифметикӣ бо фарқи гайриинулӣ дида баромадан мумкин аст. Ададҳоро ёбед.
521. Суммаи се аъзои аввалаи прогрессияи геометрии афзуншаванда ба 91 баробар аст. Агар ба ин аъзоҳо мувофиқан ададҳои 25, 27 ва 1-ро илова кунем, прогрессияи арифметикиро ҳосил мекунем. Аъзои ҳафтуми прогрессияи геометриро ёбед.
522. Се адади x , y ва z прогрессияи геометрӣ ва ададҳои x ; $2y$; $3z$ прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳанд. Маҳраҷи прогрессияро ёбед.
523. Се адади аз нул фарккунанда прогрессияи арифметикӣ ва квадратҳояшон бо ҳамон тартиб прогрессияи геометриро ташкил медиҳанд. Маҳраҷи прогрессияи геометриро ёбед.
524. Прогрессияҳои арифметикӣ ва геометриро ёбед, агар
– суммаи се аъзои аввалаашон, мувофиқан, ба 15 ва 35 баробар бошад;
– аъзои якуми прогрессияи арифметикӣ аз аъзои якуми прогрессияи геометрӣ 2 вохид кам ва аъзои дуҷуми прогрессияи арифметикӣ ба аъзои якуми прогрессияи геометрӣ баробар бошад.
525. Чор адад прогрессияи геометриро ташкил медиҳанд. Агар аз онҳо, мувофиқан, ададҳои 2; 3; 7; ва 17-ро тарҳ кунем, он гоҳ ададҳои ҳосилшуда прогрессияи арифметикии афзуншавандаро ташкил медиҳанд. Панҷ аъзои аввалаи прогрессияҳоро ёбед.
526. Нишон диҳед, ки пайдарпайии 1; 2; 6; 7-и ҳосиятҳои иловагии прогрессияи арифметикиро қаноаткунанда прогрессия нест.
527. Нишон диҳед, ки пайдарпайии 1; 3; 4; 12-и ҳосиятҳои иловагии прогрессияи геометриро қаноаткунанда прогрессия шуда наметавонад.

Машиқҳо барои такрор

528. Аз як варақ тунукаи квадратшакл қитъаи бараш 20 мм бударо буриданд. Агар масоҳати росткунҷаи ҳосилшуда ба 1000мм^2 баробар бошад, он гоҳ ченакҳои аввалаи тунукаро ёбед.
529. Суммаи квадратҳои ду адади пайдарпайи бутун аз дучанди адади хурдтараш 51 вохид калон аст. Ададҳоро ёбед.
530. Иббот кунед, ки барои n -и дилхоҳи бутуни гайриманфӣ ифодаи $7^n + 3n - 1$ ба 9 тақсим мешавад.

531. Касрхоро ихтисор кунед:

$$\text{а) } \frac{a^2-3a+2}{a^2+5a-6}; \quad \text{б) } \frac{a^4-2a^2+2^2}{a^6+8}; \quad \text{в) } \frac{x^6+x^4+x^2+1}{x^3+x^2+x+1}; \quad \text{г) } \frac{x^6-1}{x^4+x^2+1}.$$

532. Бо методи фосилаҳо nobаробариҳоро ҳал кунед:

$$\text{а) } \frac{x+1}{2x-4} \geq 0; \quad \text{б) } (x^2-1)(x-3) < 0.$$

533. Нули функцияро ёбед:

$$\text{а) } f(x) = \frac{2x-8}{x^2}; \quad \text{б) } f(x) = 2x^2 - 11x + 9; \quad \text{в) } f(x) = \frac{2}{x-3}.$$

534. Ду насос якҷоя об кашида, ҳавзро дар 12 соат пур мекунанд. Насоси якум назар ба дуом ҳавзро 10 соат зудтар пур мекунад. Насоси дуом ҳавзро дар чанд соат пур мекунад?

МАЪЛУМОТИ ТАЪРИХӢ

Мафҳуми пайдарпайии ададӣ то пайдойиш ва эҷодшавии таълимот оид ба функцияҳо ба вучуд омадааст, чунки пайдарпайиҳои зеринро аз қадим медонистанд: пайдарпайии ададҳои натуралӣ; пайдарпайии ададҳои ҷуфт; пайдарпайии ададҳои тоқ, пайдарпайии квадрати ададҳои натуралӣ; пайдарпайии ададҳои сода ва пайдарпайии ба ададҳои натуралӣ ҷалпа.

Ҳамаи пайдарпайиҳои номбаршудаи боло, ғайр аз панҷумаш, додашуда ҳисобида мешаванд, чунки барои ҳар кадомаш аъзои n -ум маълум аст. Дар асри III пеш аз солшумории мо Эратосфен (аз Искандария) тарзи ҳосилкунии аъзои n -уми пайдарпайии ададҳои содаро нишон додааст, ки он «ғалбери Эратосфен» ном гирифтааст.

Прогрессияҳо чун мавриди хусусии пайдарпайиҳои ададӣ дар ёдоштҳои 2000 сол пеш аз милод қайдшуда ва то имрӯз омадарасида вомехӯранд. Масъалаҳои зиёди ба прогрессия вобаста дар эҷодиёти бобулиён ва мисриёни қадим ҳастанд. Ба сифати мисол масъалаеро аз папируси Ахмес меорем: «Ба Шумо гуфтем: 10 чен ҷавро ба 10 шахс ҷунон тақсим кунед, ки фарқи чени ҷави ҳар як шахсу ҳамсояш ба $\frac{1}{8}$ чен баробар шавад». Дар ҳалли ин ва масъалаҳои ба он монанд юнониҳои қадим аз формулаҳои истифода мебарданд, ки бо рамзҳои ҳозира намуди $a_1 = \frac{S}{n} - (n-1)\frac{d}{2}$ -ро дораду ба формулаи $S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ баробаркувва аст (пайдойиши ин формула то ҳол маълум нест. Эҳтимол, он характери эмпирикиро дошта бошад). Умуман, дар масъала сухан дар бораи прогрессияи арифметикӣ, ки суммааш ба 10 ва фарқаш ба $\frac{1}{8}$ - баробар аст, меравалу ёфтани $a_1; a_2; \dots; a_{10}$ талаб карда мешавад.

Масъалаи дигари папируси Ахмес ёфтани суммаи прогрессияи геометрии $1+2+2^2+\dots+2^9$ мебошад. Ҳал ва ҷавоби масъала дар шакли $S=512+(512-1)$

омадааст, ки он аз формулаи

$$S_n = 2^n + (2^n - 1)$$

(найдоиши он то ҳоло маълум нест) истифода бурдани муаллиф шаҳодат медиҳад.

Масъалаҳои ба прогрессия вобаста дар китобҳои хитойҳои қадим ва ҳинд, ки бештар мазмуни ҳаётӣ, ба монанди тақсимоти маводи хӯрока, мерос ва ғайраро доштанд, низ мушоҳида карда мешавад.

Мушоҳидаи бевоситаи бобулиён ба моҳ (аз саршавӣ то пуррашавиаш) ба ҳулосаи зерин оварда буд: баъди 5 рӯзи ибтидои саршавӣ дараҷаи равшаншавии калони моҳ аз рӯйи қонуни прогрессияи геометрӣ бо маҳраҷи 2 ба амал меояд.

Қиссаи ҳиндуҳо оид ба кашфи шоҳмот мисоли наватӣ шуда метавонад. Подшоҳи Ҳинд Шерам ихтироъкор Сетро, ки аз фуқаҳои ҳудаш буд, ба наздаш хонда, майли ба ӯ мукофот доданро мекунад. Сет бошад, бо мақсади мазоққунии шоҳаш аз ӯ барои хонаи якуми тахта 1 дона гандум, барои хонаи дуюмаш ду маротиба зиёд (яъне 2 дона гандум), барои хонаи сеюмаш (назар ба дуюмаш) боз ду маротиба зиёд (яъне 4 дона гандум), барои хонаи чорумаш (назар ба пештара) ду маротиба зиёдтар (яъне 8 дона гандум) ва ғайра талаб мекунад. Баъдтар маълум мешавад, ки подшоҳ ҳеч гоҳ ин хоҳиши «хоксорона»-и Сетро иҷро карда наметавонад*.⁶ Ҳақиқати ҳол дар он буд, ки дар талабот сухан дар бораи суммаи шасту чор аъзои прогрессияи геометрии $1; 2; 2^2; 2^3; \dots; 2^6$ меравад (шасту чор аъзои прогрессия ба шумораи 64 хонаҷаи тахтаи шоҳмот вобаста аст). Ҳисоб карда шудааст, ки миқдори донаҳои талабкардаи гандум ба 18446744073709551615 баробар аст. Вазни ин миқдор гандум аз триллион тонна зиёдтар буда, онро фақат аз сайёрае ғундоштан мумкин аст, ки сатҳаш аз тамоми сайёраи Замин 2000 маротиба калонтар аст (инсоният аз давраи пайдоиш то ҳол ин миқдор гандумро ҷамъоварӣ накардааст).

Акнун, якчанд сухан дар бораи тараққиёти таълимот оид ба прогрессияҳо. Маълумоти назариявии ба прогрессияҳо алоқаманд аввалин маротиба дар ҳуҷҷатҳои ба мо расидаи Юнони қадим вохӯрдаанд. Дар асри V пеш аз милод юнониҳо прогрессияҳо ва суммаи ба онҳо мувофиқи зеринро медонистанд:

- 1) $1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$; 2) $2+4+6+\dots+2n=n \cdot (n+1)$;
- 3) $1+3+5+\dots+(2n+1)=(n+1)^2$.

* Ногуфта намонад, ки ин масъала дар қорҳои Абӯрайҳони Берунӣ ҳам ёфт шудааст.

Архимед аввалин шуда прогрессияҳои арифметикиву геометрии 1; 2; 3; 4; 5; ... ва $10; 10^2; 10^3; 10^4; 10^5; \dots$

-ро муқоиса карда, алокаи байни онҳоро нишон медиҳад. Масалан, $\bar{y} 10^3 \cdot 10^5 = 10^{3+5} = 10^8$ -ро навишта, нишон медиҳад, ки барои ҳосили зарби ду аъзои прогрессияи геометрӣ аъзои мувофиқи прогрессияи арифметикиро ҷамъ намуда, суммаи ҳосилшударо ба сифати нишондиҳандаи адади 10 гирифтани кофист. Муаллифи римӣ Боэтсий (асри VI) аввалин шуда истилоҳи «прогрессия»-ро (чун пайдарпайии махсуси ададии беохир) ба илм дохил кардааст. Номҳои «арифметикӣ» ва «геометрӣ» бошад, аз назарияи таносубҳои бефосила, ки юнониҳои қадим меомӯхтанд, ба прогрессия илова карда шуданд. Дар ҳақиқат, юнониҳо баробариҳои $a_{k-1} - a_k = a_k - a_{k+1}$ ва $b_{k-1} : b_k = b_k : b_{k+1}$ -ро, мувофиқан, таносубҳои арифметикӣ ва геометрии бефосила меноманд. Аз онҳо баробариҳои $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$ ва $b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}}$ ки мувофиқан ҳосиятҳои прогрессияҳои арифметикӣ ва геометрии ифода мекунанд, бармеоянд.*

Олими Юнони қадим Диофант (асри III) формулаи суммаи аъзои прогрессияи арифметикиро исбот карда буд.

Дар «Ибтидо»-и Уқлидус (Евклид) теоремае омадааст, ки тадқиқоти он ба формулаи

$$S_n = \frac{1 \cdot q - a}{q - 1} \quad (1)$$

баробаркувва буда, суммаи ба мо шиносии n аъзои прогрессияи геометрии ифода мекунанд. Яке аз исботҳои Архимед, ки дар асараш «Квадратураи парабола» ҷой дода шудааст, ба ҷамъбандии прогрессияи беохирӣ геометрии

$$a = \frac{a}{4} + \frac{a}{4^2} + \frac{a}{4^3} \dots = \frac{a}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} a$$

оварда мерасонад. Архимед инчунин барои ҳалли баъзе масъалаҳои механикаю геометрия (аз ҷумла барои ёфтани масоҳат ва ҳаҷми ҷисмҳо) формулаи суммаи квадратҳои ададҳои натуралии охиринокро дар шакли

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

ҳосил намуд.**

* Прогрессияи арифметикиро бо симболи $+$ ва геометрии бо симболи $\cdot$ ҳам ишорат мекунанд. Ин символҳо аввалин маротиба дар қорҳои риёзидони англис Барроу истифода шудаанд.

** Тадқиқотҳо нишон додаанд, ки формулаи (3)-ро пеш аз Архимед ҳам истифода мебардаанд.

Бисёр формулаҳои ба прогрессияҳои арифметикиву геометрӣ вобаста ба олимони ҳинд маълум буданд. Ариабхатта (асри V) формулаи аъзои n -ум ва суммаи аъзоҳои прогрессияи арифметикиро медонист. Магавира (асри IX) дар қорхояш формулаи (3) ва баъзе суммаҳои мураккаби охирикро истифода мебард. Вале қоидаи ёфтани суммаи аъзоҳои прогрессияи арифметикии дилхоҳ дар «Китоби абак»-и Леонардои Пизанӣ* (с. 1202) дучор мешавад.

Қоидаи умумии ҷамъбандии прогрессияҳои геометрии беохир камшавандаи дилхоҳро Н. Шюкс дар китоби «Илм дар бораи ададҳо» (с. 1484) меорад.

Ногуфта намонад, ки риёзидонони асрҳои XV-XVII Осиёи Миёна низ мафҳуми прогрессияро медонистанд. Ин дар ҳалли масъалаи зерин баръало намоён аст: «Ҷамоае ба боғ даромаданд. Шахси аввал як анор канд, дуюм ду анор, сеюм се анор ва ҳоказо бо тафосили воҳид. Баъд маҷмӯи апорро ҷамъ карданд ва баробар тақсим намуданд. Ба ҳар қадом ҳафт анор расид. Бигӯ, он ҷамоа ва анор чанд буданд?» Агар масъаларо, ки муаллифаш Қозиюлкузот Муҳаммад Наҷмиддин Алихон аст, ба памиди ишорати ҳарфии ҳозира нависем, он гоҳ дар ҳолати миқдори шахсони ҷамоаро бо x ва анорҳоро бо y ишорат кардан, дар охир ифодаи зерин ҳосил мешавад:

$$\left(\frac{1+x}{2} \cdot x\right) : x = 7$$

Аз он $14x = x^2 + x$ ва ё $x^2 = 13x$ пайдо мешавад. Пас, $x = 13$ (миқдори шахсон) ва $(13+1) \cdot 13 = 7 \cdot 13 = 91$ (миқдори анорҳо) аст.

Дар ҳалли ин масъала Наҷмиддин чунин ҳисоббаробариҳоро нисбаи прогрессияҳои арифметикӣ истифода мебард:

$$1) S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \text{ ва аз он } \frac{S}{n} = \frac{a_1 + a_n}{2};$$

$$2) \text{ гузоштани } a_1 = 1, a_n = x \text{ ва } \frac{S}{n} = 7 \text{ ва ҳосил кардани муодилаи } \frac{1+x}{2} = 7 \text{ -ро, ки } x = 13 \text{ решаи он аст;}$$

$$3) \text{ барои ёфтани ҷамъи анорҳо формулаи } S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Нихоят, қайд мекунем, ки формулаи ҷамъбандии прогрессияи геометрии беохир камшаванда ба П. Ферма (1601-1665) ва чанде аз риёзидонони асри XVII маълум буд.

* Л. Пизанӣ бештар бо таҳаллуи «Фибоначчи» (Fibonacci - калимаи кӯтоҳшудаи «Filus Bonacci», яъне писари Боначчи ба аҳли илм маълуми маъруф аст.

Машқҳои иловагӣ ба боби III

Ба параграфи 7

535. Шаш аъзои аввалаи пайдарпайиро нависед, агар аъзои умумиаш дар намуди зерин дода шуда бошад:

- | | | |
|--------------------------------|---|-------------------------------|
| а) $a_n = n + 7$; | г) $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-3}$; | ж) $a_n = \frac{1}{n^3}$; |
| б) $a_n = 2^n + 1$; | д) $a_n = -\left(-\frac{1}{n}\right)^n$; | з) $a_n = (n-2)^2$; |
| в) $a_n = \frac{1}{2^n} - 1$; | е) $a_n = \frac{n^2 \cdot (n+1)}{2}$; | и) $a_n = (-1)^n \cdot 4^n$; |
| г) $a_n = \frac{5}{n}$; | ё) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$; | к) $a_n = -n^3 + 1$. |

536. Аъзои умумии пайдарпайии ададӣ бо формулаи $a_n = 2n^3 + 3$ ифода ёфтааст. Оё ададҳои -7 ; 5 ; 19 ; 21 ; 57 ; 131 ; 178 ; 217 ; 305 ; 297 ; 401 аъзои пайдарпайӣ шуда метавонанд? Агар тавонанд, он гоҳ рақами тартибиашро муайян кунед.

537. Масъалаи 536-ро барои $a_n = 2n^3 - 3$ ва ададҳои 15 ; 23 ; 180 ; 197 ; 335 ; 447 ; 609 ; 781 ҳал кунед.

538. Оё ададҳои $1,3$ ва $-3,3$ аъзои прогрессияи арифметикии $20,7$; $18,3$; ...

мебошанд?

539. Формулаи аъзои n -уми пайдарпайиро нависед, агар:

- | | |
|-------------------------------------|--|
| а) 1 ; $4,5$; 8 ; $11,5$; ... | б) 0 ; 1 ; 3 ; 7 ; 15 ; 31 ; ... |
|-------------------------------------|--|

бошад.

540. Аз пайдарпайиҳои зерин прогрессияҳои арифметикӣ ташкил диҳандашро ҷудо карда, фарқашро ёбед:

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| а) 47 ; 44 ; 41 ; ... | ё) 2 ; 6 ; 10 ; 14 ; ... |
| б) $7,5$; 6 ; $4,5$; ... | ж) 4 ; 11 ; 18 ; 25 ; |
| в) -10 ; -7 ; -4 ; ... | з) 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; ... |
| г) $9,6$; $4,6$; $-0,4$; ... | и) 10 ; 8 ; 6 ; 4 ; ... |
| г) -1 ; $-1,1$; $-1,2$; ... | к) 11 ; 17 ; 27 ; 31 ; ... |
| д) $1,5$; $1,7$; $1,8$; $1,9$; | қ) $4,1$; 9 ; $10,5$; ... |
| е) 3 ; 7 ; 18 ; 19 ; ... | л) $3,3$; $6,6$; $9,9$; ... |

541. Аъзои якуми прогрессияи арифметикиро ёбед, агар $a_{13} = 113$ ва $d = 9$ бошад.

542. Аз рӯйи прогрессияҳои арифметикии додашуда a_n -ро ёбед:

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------------|
| а) 4 ; 8 ; ... $n = 8$; | в) a ; $4a$; ... $n = 81$; |
| б) 7 ; 11 ; ... $n = 31$; | г) $0,009$; $0,012$; ... $n = 20$. |

543. Аъзои якум ва фарқи прогрессияи арифметикиро ёбед, агар:

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| а) $a_{13} = 54$, $a_{19} = 84$; | г) $b_{10} = 15$, $b_{13} = -21$; |
| б) $a_7 = 41$, $a_{11} = 53$; | ғ) $c_8 = 29$, $c_{15} = 57$; |
| в) $a_1 = 9$, $a_{14} = -3$; | д) $x_2 = -8$, $x_5 = -29$ |

бошад.

544. Аъзoi охиринаи прогрессияи арифметикиро ёбед, агар:
 а) $a_1=7, d=5, n=31$; б) $a_1=0,8, d=-0,4, n=301$;
 в) $a_1=4,8, d=-1,2, n=91$
 бошад.
545. Фарқи прогрессияи арифметикии (a_n) -ро ёбед, агар:
 а) $a_1=80, a_n=-4, n=21$ ва б) $a_1=1, a_{19}=42$ бошад.
546. Шумораи аъзoi прогрессияи арифметикиро ёбед, агар:
 а) $a_n=200, d=5$ ва $a_1=10$ бошад.
547. Суммаи n -аъзoi прогрессияи арифметикиро ёбед, агар:
 а) $a_1=-6, a_n=106, n=18$; б) $a_1=-3, a_n=180, n=12$
 бошад.
548. Аъзoi якум ва суммаи n -аъзoi аввалаи прогрессияи арифметикиро ёбед, агар:
 а) $d=3, a_n=200, n=20$; б) $d=-0,25, a_n=32, n=50$
 бошад.
549. Муодиларo ҳал кунед:
 а) $1+5+9+\dots+x=861$; б) $1+7+13+\dots+x=280$.
550. Прогрессияи арифметикии (a_n) -ро ёбед, агар:
 а) $\begin{cases} a_2 - a_3 = 10 - a_5, \\ a_1 + a_6 = 17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a_1 + a_4 = -5, \\ a_2 + a_5 = -11; \end{cases}$ в) $\begin{cases} a_1 + a_5 = 24, \\ a_2 \cdot a_3 = 60; \end{cases}$
 бошад.
551. Суммаи прогрессияи арифметикӣ, ки аз 30 аъзо иборат аст, ба 3645 ва аъзoi якумаш ба 20 баробар аст. Аъзoi ҳафтумашро ёбед.
552. Суммаи се аъзoi аввалаи прогрессияи арифметикӣ ба 66 ва ҳосили зарби аъзoi дуюм бар сеюмаш ба 528 баробар аст, Суммаи 40 аъзoi аввалаи прогрессияро ёбед.
553. Маълум аст, ки дар прогрессияи арифметикии (a_n) $a_4=9$ ва $a_9=-6$ аст. Чанд аъзoi онро грифтан зарур аст, то ки сумаашон 54 шавад?
554. Суммаи аъзoi якуму панҷуми прогрессияи арифметикии афзуншаванда ба 14 ва ҳосили зарби аъзoi дуюм бо чорумаш ба 45 баробар аст. Суммаи чанд аъзoi ин прогрессия ба 24 баробар аст?
555. Пайдарпайии (a_n) дода шудааст. Агар
 а) $a_n=2n-7$; б) $a_n=8n$; в) $a_n=-n+5$
 бошад, формулаи суммаи n -аъзoi аввалаи пайдарпайиро нависед.
556. Прогрессияи арифметикӣ дода шудааст. Агар:
 а) $S_{15}=225, S_{40}=1680$; б) $S_{13}=-52, S_{21}=-168$
 бошад, S_{45} -уми онро ёбед.

557. Дар байни ададҳои 17 ва 32 панҷ ададро чунон нависед, ки онҳо дар яқоягӣ прогрессияи арифметикиро ташкил диҳанд. Суммаашонро ёбед.
558. Дар прогрессияи арифметикӣ, ки аз чор аъзо иборат аст, суммаи се аъзои аввалааш ба -21 ва суммаи се аъзои охиринаш ба -6 баробар аст. Суммаи ин прогрессияро ёбед.
559. Пайдарпайии (a_n) дода шудааст. Маълум аст, ки суммаи n -аъзои аввалаи он бо формулаи $S_n = \frac{1}{2}(3n^2 - 19n)$ ҳисоб мешавад. Магар ин пайдарпайӣ прогрессияи арифметикӣ аст?
560. Чанд аъзои прогрессияи арифметикии 5: 9: 13: 17: ...-ро гирифтани зарур аст, то сумаашон ба 11 475 баробар шавад?

- 561.** Нишон диҳед, ки пайдарпайии ададҳои хақиқии азояш якхела ҳам прогрессияи арифметикӣ ва ҳам прогрессияи геометрияро ташкил медиҳад.
- 562.** Кадоме аз пайдарпайҳои зерин прогрессияи геометрия мешаванд:
- а) 4; 12; 18; 28; ... в) 1,5; 3; 6; 12; 24; ...
б) -3; 2; 0; 5; 17; 1; ... г) 6; 3; 1,5; 0,75; ...?
- 563.** Азҳои якуми прогрессияи геометрияро ёбед, агар:
- а) $b_6=486$, $q=3$; г) $b_9=768$, $q=2$;
б) $b_7=192$, $q=2$; д) $b_5=170,1$, $q=3$;
в) $b_6 = -\frac{4}{27}$, $q = -\frac{1}{3}$; е) $b_6 = \frac{243}{64}$, $q = 1,5$;
г) $b_8 = \frac{2187}{128}$, $q = \frac{3}{2}$; ё) $b_5=512$, $q=2$.
- бошад.
- 564.** Махраҷи прогрессияи геометрияро ёбед, агар:
- а) $b_1=1,5$ ва $b_4=96$; б) $b_1=1$, $b_6=32$;
в) $b_1+b_4=14$, $b_2+b_5=42$
- бошад.
- 565.** Азҳои якум ва махраҷи прогрессияи (b_n) ёфта шаванд, агар:
- а) $\begin{cases} b_4 - b_2 = 18, \\ b_2 - b_3 = 36; \end{cases}$ в) $\begin{cases} b_1 + b_3 = 15, \\ b_4 - b_2 = 18; \end{cases}$ г) $\begin{cases} b_1 + b_5 = 17, \\ b_4 + b_8 = 136. \end{cases}$
б) $\begin{cases} b_1 - b_3 + 25b_5 = -150, \\ b_1 + b_2 = -180; \end{cases}$ г) $\begin{cases} b_2 + b_4 = 56, \\ b_2 + b_3 = 24; \end{cases}$
- 566.** Ададҳо ёбед, ки дар байни ададҳои 2,1 ва 18,9 воқеъ бошад ду дар якҷоягӣ бо онҳо прогрессияи геометрияро ташкил диҳад.
- 567.** Ададҳо ёбед, ки дар байни ададҳои 3 ва 243 воқеъ бошад ду дар якҷоягӣ бо онҳо прогрессияи геометрияро ташкил диҳад.
- 568.** Дар байни ададҳои 1 ва 16 се ададро хамин ҳел гузоред, ки дар якҷоягӣ бо ададҳои додашуда прогрессияи геометрияро ташкил диҳанд.

569. Прогрессияи геометрии (b_n) -ро ёбед, агар:

а) $\begin{cases} b_2 - b_1 = 20, \\ b_4 - b_1 = 140; \end{cases}$ б) $\begin{cases} b_5 + b_1 = -561, \\ b_6 - b_4 = 792; \end{cases}$ в) $\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 21, \\ b_4 + b_5 + b_6 = 168. \end{cases}$
бошад.

570. Аъзoi якуми прогрессияи геометрии камшавандарo ёбед, агар $S_n = 4$ ва $q = \frac{1}{2}$ бошад.

571. Суммаи аъзoi прогрессияи геометрии камшаванда ба 9 ва суммаи квадрати аъзoi он ба 40,5 баробар аст. Аъзoi якум ва махрачи прогрессияро ёбед.

572. Суммаи бохирро ҳисоб кунед:

а) $2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots$; б) $32 + 8 + 2 + \dots$

573. Барои прогрессияҳои

а) 3; 6; 12; 24; ...; б) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots; \frac{1}{2^{n-1}}$.

S_{10} ва S_n ёфта шавад.

574. Дар прогрессияи геометрии бохир камшаванда $b_2 = 21$ ва $S = 84$ аст. b_4 ёфта шавад.

575. Дар прогрессияи геометрии аъзояш мусбат $b_1 = 2$ ва $b_2 + b_3 = 1,5$ аст. S_4 ёфта шавад.

576. Суммаи шаш аъзoi аввалаи прогрессияи геометрии ёбед, агар $b_1 = 4$ ва $q = \frac{1}{2}$ бошад.

577. Суммаи даҳ аъзoi аввалаи прогрессияи геометрии 2; 8; 32; 128; ...-ро ёбед.

578. Суммаи шаш аъзoi аввалаи прогрессияи геометрии ёбед, агар аъзoi шашумаш ба 2048 ва махрачаи ба 4 баробар бошад.

579. Қасрҳои даврии бохири зеринро дар шакли қасри одӣ нави-
сед:

а) 0,58(3); в) 1,3 (32); г) 0, (7);
б) 3,2 (54); г) 12,08 (3); д) 0,2 (31).

580. Дар дохили секунҷаи баробартараф бо тарафи a секунҷаи нав кашида шудааст, ки қуллаҳои дар миёнаҳои тарафҳои секунҷаи аввала ҷой доранд. Бо ҳамин тарз дар дохили секунҷаи дуюм секунҷаи баробартарафи дигар ҷойгир аст ва ҳоказо. Ибтo кунед, ки пайдарпайии масоҳатҳои секунҷаҳо прогрессияи геометрии ташкил медиҳад. Суммаи онро ёбед.

581. Чор адади мусбат прогрессияи геометрии ташкил медиҳанд. Ҳосили зарби ададҳои якум ва чорум ба решаи қалони муодилаи $x^2 - 10000 = 0$ ва суммаи квадратҳои ададҳои дуюм сеюм ба 250 баробар аст. Ин ададҳо ёбед.

582. Чор адади прогрессияи геометрӣ ташкилкунандаро ёбед, ки дар он суммаи аъзои канорӣ ба 27 ва ҳосили зарби аъзои мобайнӣ ба 72 баробар бошанд.
- *583. Прогрессияи геометриро бо махрачи манфӣ ёбед, ки аъзои сеюмаш ба -1 , суммаи се аъзои аввалааш ба -73 ва b_1, b_2, b_4, b_5 вобастагии $b_4 + b_5 = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}$ -ро қаноат намояд.
584. Аъзои сеюми прогрессияи геометрии беохирро ёбед, агар аъзои дуюмаш ба 72 ва суммааш ба 378 баробар бошад.

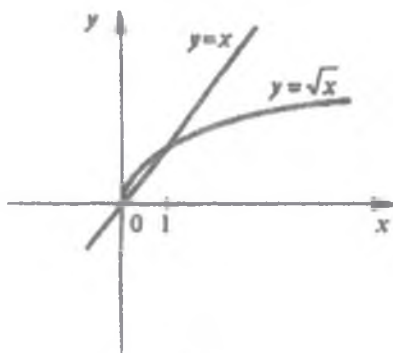
Ба параграфи 9

585. Дар прогрессияи арифметикӣ $a_1=5$ ва $a_2=7$ аст. Чунин прогрессияи геометриро ёбед, ки махрачааш аз фарқи прогрессияи арифметикӣ панҷ воҳид зиёд буда, суммаи чор аъзои аввалааш ба 400 баробар бошад.
586. Дар прогрессияи арифметикии мусбати (a_n) ва геометрии мусбати (b_n) аъзои дуюм ба 4 ва аъзои якум низ ба ҳам баробаранд. Прогрессияхоро нависед, агар аъзои сеюми прогрессияи арифметикӣ аз аъзои сеюми прогрессияи геометрӣ 9 воҳид кам бошад.
587. Дар прогрессияи геометрӣ аъзои якум, сеюм ва панҷумаш, мувофиқан, ба аъзои якум, чорум ва шонздаҳуми ягон прогрессияи арифметикӣ баробар аст. Аъзои чоруми прогрессияи арифметикиро ёбед, агар аъзои якуми он ба 5 баробар бошад.
588. Се адад, ки суммашон ба 28 баробар аст, прогрессияи геометриро ташкил медиҳанд. Агар ба адади якум 3, ба дуюм 1 илова карда, аз сеюмаш 5-ро кам кунем, он гоҳ ададҳои ҳосилшуда прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳанд. Ин ададҳо ёбед.
589. Чор ададҳо ёбед, ки сетои аввалааш прогрессияи геометрӣ ва сетои охиринаш прогрессияи арифметикиро ташкил диҳад. Маълум аст, ки суммаи аъзои канориаш ба 14 ва суммаи аъзои мобайниаш ба 12 баробаранд.
590. Масъалаи 589-ро ҳангоми суммаи аъзоҳои канорӣ ба 21 ва мобайнӣ ба 18 баробар будан, ҳал намоед.
591. Суммаи се аъзои аввалаи прогрессияи афзуншавандаи арифметикӣ ба 21 баробар аст. Агар аз аъзоҳои он, мувофиқан, ададҳои 2,3 ва 2-ро кам кунем, он гоҳ се аъзои аввалаи прогрессияи геометриро ҳосил мекунем. Прогрессияхоро ёбед.
592. Чор адад прогрессияи камшавандаи геометриро ташкил медиҳад. Агар аз ду адади аввала, мувофиқан, ададҳои 13 ва 4-ро кам карда, ба ададҳои сеюму чорумаш, мувофиқан, 9 ва 30-ро илова кунем, он гоҳ ададҳои нави ҳосилшуда прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳад. Прогрессияхоро ёбед.

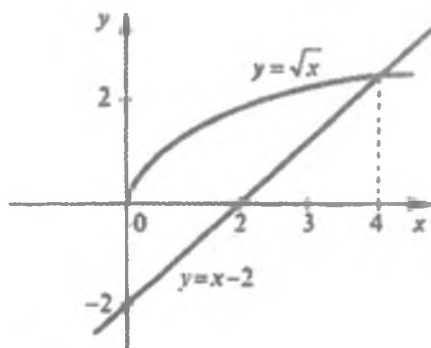
ЦАВОБХО

- 356.** а) $a_3=6$; $a_6=12$; $a_7=14$; б) $a_2=72$; $a_5=9$; $a_6=\frac{9}{2}$; $a_7=\frac{9}{4}$. **357.** а) 3; 9; б) 27; 81; в) 243; 729; 2187; г) 19683. **358.** а) 4; 8; 12; 16; 20; 24; б) $a_9=36$; $a_{101}=404$; в) $a_{2k}=8k$. **359.** а) 2; -1; 2; -1; 2; б) $c_7=c_{21}=c_{103}=c_{2k-1}=2$; $c_{12}=c_{204}=c_{2k}=-1$. **360.** а) 2; 8; 18; 32; 50; 72; 98; 128; б) $x_{18}=648$; $x_{23}=1058$; $x_{41}=3362$; $x_{2n}=8_n^2$. **361.** а) $a_n=n$; б) $a_n=\frac{1}{2^n}$; в) $a_n=\frac{n+1}{n}$; г) $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$. **362.** $a_n=\frac{1}{2n+1}$; б) $a_n=\frac{n}{n+1}$. **363.** а) 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5; б) 0; -3; -8; в) 4; 4; 4; 4; г) -12; 12; -12; 12; -12; 12; -12; 12; -12; 12; г) 3; 8; 15; 24; д) 0; -1; 0; 3; 8. **364.** а) 1; 7; 17; 31; 49; 71; 97; б) 5; 8; 11; 14; 17; 20; 23; в) $\frac{1}{2}$; 1; $\frac{5}{4}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{11}{7}$; $\frac{13}{8}$; г) -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9; ф) 1; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{12}{7}$; $\frac{7}{4}$; д) $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{2}$; 3; 6; 12; 24; 48; е) 4; 13; 28; 49; 76; 109; 148; ё) -3; 3; -3; 3; -3; 3; -3; ж) 8; 32; 128; 512; 2048; 8192. **365.** $b_4=72$; $b_{13}=2223$; $b_{61}=227103$. **366.** а) $c_2=20$; $c_3=28$; $c_4=36$; $c_5=44$; $c_6=52$; б) $c_2=100$; $c_3=25$; $c_4=\frac{25}{4}$; $c_5=\frac{25}{16}$; $c_6=\frac{25}{64}$. **367.** а) 19; 20; 21; 22; 23; 24; б) 1000; 10; 10^{-1} ; 10^{-3} ; 10^{-5} ; 10^{-7} ; в) 160; -80; 40; -20; 10; -5; г) $3\frac{2}{3}$; $3\frac{2}{3}$; $3\frac{2}{3}$; ф) 3; 9; 21; 45; 93; 189; з) 2; 7; 342; 40001687. **368.** а) 15; 20; 25; 30; 35; 40; б) 25; 122; 697; 3482; 17407; 87032; в) 4; 5; 7; 11; 19; 35; г) $6\frac{1}{3}$; $6\frac{1}{3}$; $6\frac{1}{3}$; **369.** а) 3; 27; 19683. **370.** 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; ...; $\frac{1}{2^{n-1}}$. **371.** -7; 7; -7; ... **372.** а) $2+\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}-1$; в) $(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{2}$; г) $\sqrt{5}-2$. **373.** а) 64; б) -96; в) 64; г) 343; ф) 81; д) 361. **374.** а) 5; б) 6; в) 30. **375.** а) $x_1=-9$; $x=1$; б) $x=\frac{1}{2}$. **376.** 25 км/соат. **377.** а) (-2; 9); б) (1; 3). **378.** а) -3; б) вучуд надорад; в) -7; г) $-\frac{193}{9}$; ф) -13,5. **379.** 18 ва 6. **380.** а) He; б) ха; в) ха; г) не. **381.** а) 2; 3; 4; 5; ...; $(n+1)$; ...; б) $\frac{1}{2}$; 1; $\frac{3}{2}$; 2; $\frac{5}{2}$; ...; в) -7; -4; -1; 2; 5; ...; г) 5; 7; 9; 11; 13; ...; г) 2,1; 2,3; 2,5; 2,7; ...; д) -1; -1; -1; -1; ...; ё) 0,51; 0,6; 0,69; 0,78; ...; ж) 2,1; 2; 1,9; 1,8; ...; з) 3; 3,5; 4; 4,5; 5; ...; и) 1; 10; 19; 28; 37; ... **382.** а) 2; б) 1; в) -1; г) 4; ф) 10; д) -9; е) 7; з) 0; ё) 2; ж) 6. **383.** 3 соат. **384.** а) $x-1$ мешавад, агар $x>0$ ва $x\neq 1$ бошад; б) $x+1$ мешавад, агар $x\neq 0$ ва $x\neq 1$ бошад. **385.** а) 0; -1; б) $\frac{1}{4}(\sqrt{33}-1)$. **387.** $\sqrt[4]{\frac{a^2}{3}}$ ва $\sqrt[4]{3a^2}$. **388.** C; D; E; F. **389.** а) $x\neq 4$; б) $\forall x\in R$. **390.** а) $a_n=\frac{3n}{n+1}$; б) $a_n=(-1)^n 6$. **391.** а) a_1+16d ; б) a_1+125d ; в) a_1+280d ; г) $a_1+(k+1)d$; ф) $a_1+(k+14)d$; д) a_1+2kd . **392.** а) $b_5=40$; б) $b_{21}=-14,2$; в) $b_{111}=74$; г) $b_{216}=-21$; ф) $b_{31}=59$; д) $c_{18}=10,4$; е) $c_{23}=55,6$; ё) $c_{57}=177$; ж) $c_{19}=31$; з) $c_7=65$.

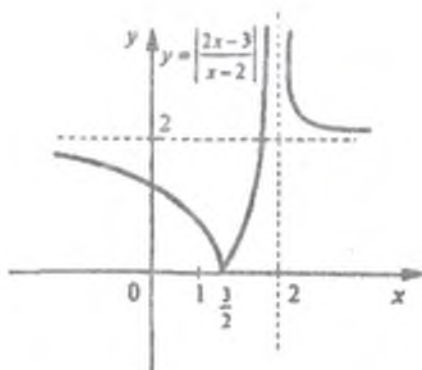
393. а) $a_{10} = -\frac{70}{3}$; $a_{21} = \frac{158}{3}$; $a_n = \frac{2}{3} - \frac{8}{3}(n-1)$; б) $a_{10} = -6,7$; $a_{21} = -17,7$; $a_n = 3,3 - n$;
 в) $a_{10} = 210$; $a_{21} = 485$; $a_n = 25n - 40$; 394. а) $a_8 = 5,5$; $a_{23} = 35,5$; $a_n = -2n - 10,5$; б) $a_8 = -11$;
 $a_{23} = -56$; $a_n = 13 - 3n$; в) $a_{23} = -160$; $a_{23} = -535$; $a_n = -25n + 40$. 395. 360 км/соат. 396. 2,6
 км/соат. 397. 124,8 км/соат. 398. $A_{15} B_{15} = 7,5$ см; $A_{100} B_{100} = 50$ см; $A_{131} B_{131} = 65,5$
 см. Нишондод. Аз рӯйи хосияти хати миёнаи секунча ва трапетсия истифода
 бурда, прогрессияи арифметикии аъзои якум ва фарқаш ба 0,5 см баробарро
 ҳосил кардан мумкин аст. 399. а) 12; б) 1916; в) 141; г) 46. 400. а) 3; б) -3,5; в) -5;
 г) 1,5. 401. 13,5; 12; 10,5; 9; 7,5; 6. 402. -1; -4; -7; -10; -13; -16; -19; -22; -25. 403.
 а) $c_1 = 21$, $d = 1,5$; б) $c_1 = 38$, $d = -2$; в) $c_1 = -100$, $d = 6,2$; г) $c_1 = 5$, $d = 5$; р) $c_1 = 4$, $d = 2$;
 д) $c_1 = -3$, $d = -15$. 404. а) $a_{11} = 73$; б) $a_7 = -16$. 405. а) ҳа; б) не. 406. Сездар аъзои
 аввали прогрессия ададҳои манфӣ мебошанд. $a_{14} = 0$, $a_{15} = 1,6 > 0$; 407.
 а) $a_n = 7n - 4$; б) $a_n = 3n + 5$. 408. а) ҳа; $a_1 = 11$, $d = 8$; б) не; в) ҳа; $a_1 = 15$, $d = 1$; г) ҳа;
 $a_1 = 35$, $d = 31$; р) ҳа; $a_1 = -1$, $d = -2,5$; д) ҳа; $a_1 = -9$, $d = -9$; е) ҳа; $a_1 = -7$, $d = -14$; ё) не; и)
 ҳа; $a_1 = 2$; $d = 5$; ж) ҳа; $a_1 = 15$, $d = 11$; и) не; к) ҳа; $a_1 = 8$, $d = 0$. 409. 25. Нишондод. Бо
 x рақами якуми ададро ишорат мекунем, он гоҳ $7-x$ рақами дуҷуми адад меша-
 вад ($x \leq 7$). Мувофиқи шарт $(x+2)(7-x) = 2 \cdot x(7-x) - 3$ ё $10(x+2) + (7-x) =$
 $= 2[10x + (7-x)] - 3$ мешавад, ки аз он $x = 2$ -ро ёфтан мумкин аст. 410. а) $\frac{14}{51}$;
 б) $\left(1 - \frac{2}{m}\right)^2$. 411. а) $-\infty < x < 8$; б) $-\infty < x < 10,5$; в) $-1 \leq x \leq 1$; г) $x \geq \frac{21}{2}$. 412. а) $x_1 = 0$. $x_2 = 1$
 (расми 92); б) $x = 4$ (расми 93). 413. а) $\frac{a-4}{x}$; б) $3x$; в) $-\frac{3}{7}$. 414. 1. 415. а) Давраи
 радиусаш ба 6 ва марказаш дар нуқтаи $(1; -3)$ ҷойгирфта; б) хати ростии тири
 Ox -ро дар нуқтаи $(3; 0)$ ва Oy -ро дар нуқтаи $(0; 2)$ буранда. 416. 0; 7; 26; 255;
 417. $S_n = -210$. 418. а) $S_{50} = 5700$; $S_{100} = 21400$; $S_n = 2n \cdot (n+7)$; б) $S_{50} = 3200$;
 $S_{100} = 11400$; $S_n = n(n+14)$; в) $S_{50} = 875$; $S_{100} = 4250$; $S_n = 0,5n(n-15)$;



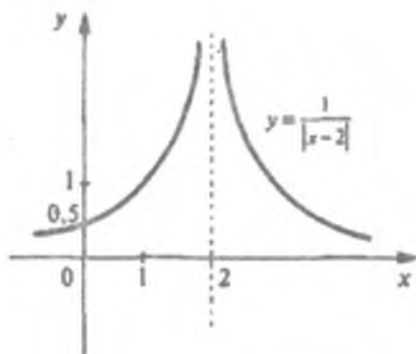
Расми 92



Расми 93



Расми 94



Расми 95

г) $S_{50} = -3575$; $S_{100} = -14650$; $S_n = 0,5n \cdot (7-3n)$. **419.** а) $(n+1)(n+2)$; б) $(n+1)^2$. **420.** а) 31375; б) 13130; в) 106533; г) 2790; г) 2484; д) 1210; е) 6545. **421.** Нишондод Мувофики шарт $S_n = 3n^2$ аст, ки аз он $a_1 = S_1 = 3$ ва $a_1 + a_2 = S_2 = 12$ мебарояд. Аз ин баробариҳо $a_1 = 3$ ва $d = 6$ -ро ҳосил кардан мумкин аст. Ҷавоб: 3; 9; 15; 21; 27; **422.** а) 1192; б) 275; в) 55; г) 199,5. **423.** 596,2 м. **424.** Нишондод. Аз натиҷаи масъалаи 7-и дар сах. 140 ҳалшуда ($v_0 = 0$, $a = g = 9,8 \text{ м/сон}^2$) истифода баред. Ҷавоб: а) 98 м; б) 490 м. **425.** 10 шоҳмотбоз, **426.** а) 23 қатор; б) 3240 сақо. **427.** ҳа; $S_n = n[a^2 + ax(3-n) + x^2]$. **428.** а) $1 \leq x < 4$; б) $x \neq -2$; в) $x = 1$; г) $-4 < x < 4$, $4 < x \leq 5$; г) $\forall x \in \mathbb{R}$; д) $x \leq 3, x > 4$. **429.** 54. **430.** $x^2 - px + s = 0$. **431.** в) 19200. **432.** а) расми 94; б) расми 95. **433.** а), в) -афзуншаванда; б), г) -камшаванда. **434.** Нишондод. 5-ро аз қавс бароварда, ба даруни қавс формулаи зарби мухтасарро татбиқ намоед. **435.** а) 2; 4; 8; 16; 32; 64; б) -18; -9; $-\frac{9}{2}$; $-\frac{9}{4}$; $-\frac{9}{16}$; в) -24; 60; -150; 375; -937,5; 2343; 75; г) $\frac{2}{5}$; $\frac{6\sqrt{2}}{5}$; $\frac{36}{5}$; $\frac{108\sqrt{2}}{5}$; $\frac{648}{5}$; $\frac{1944\sqrt{2}}{5}$; г) 1 ; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{8}{27}$; $\frac{16}{81}$; $\frac{32}{243}$; д) -4; -36; -324; -2916; -26144; -235296; е) -5; 10; -20; 40; -80; 160; ё) $-\frac{3}{4}$; $-\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{12}$; $-\frac{1}{36}$; $-\frac{1}{108}$; $-\frac{1}{324}$. **436.** б) $-\frac{1}{10}$; $\frac{1}{10^2}$; $-\frac{1}{10^3}$; ...; г) 11; -33; 99; -297; ...; д) 13; -26; 52; -104; ...; ё) 7; 35; 175; 875; ...; ж) 4; 0,8; 0,16; 0,032; ...; и) 8; -32; 128; **437.** а) -4; -12; -36; -108; ...; в) 1; 3; 9; 27; 81; ...; г) 20; 60; 180; ...; ё) 0,02; 0,06; 0,18; 0,54; ...; з) 19; 57; 171; 513; ...; д) -10; -30; -90; **438.** а) -52; б) 100; в) 3; г) 423. **439.** а) 3844; б) 7; в) 32; г) 13. **441.** а) б) в) г) ё) -охирнок; г) д) е) -беохир **442.** а) 6 ва $-\frac{3}{4}$; б) 1 ва 2401; в) $\frac{1}{100}$ ва 100; г) -1 ва 243. **443.** а) b_4 ва b_{10} ; б) b_4 ; в) не. **444.** 18 воҳ. кв. **445.** $d^2 = \frac{1400}{11}$. Муаллиф ба ҷойи π адади $\frac{22}{7}$ (яъне қимати Архимедро) гирифтааст

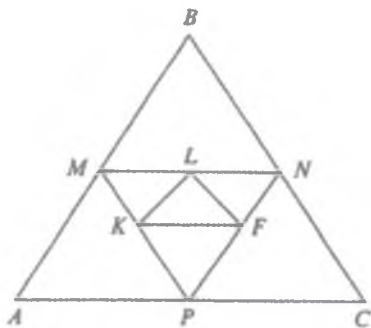
$d = \frac{20}{\pi}$ **446.** Нишондод. Бигзор, онҳо намуди $\frac{a}{b}$ ва $\frac{b}{a}$ -ро дошта бошанд. Он гоҳ, дар асоси нобаробарии $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ҳосил кардан мумкин аст: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2 \cdot \sqrt{1} = 2 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 (a > 0, b > 0)$. **447.** а) $x^2 - 5x + 6 = 0$; б) $x^2 - 4x + 1 = 0$; в) $4x^2 - 4x + 1 = 0$. **448.** а) 1,632 т; б) 4,5 т; в) $\approx 155,5$ га; г) 64,35. **450.** а) $-\frac{5}{3}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{3}{2}$ г) ± 2 ; ф) $\pm \frac{3}{2}$; д) график тири Ox -ро намебурад. **451.** а) $(x-4)^2 - 28$; б) $2(x-1)^2 - 11$. **452.** $\frac{3x-2}{x-1}$. **453.** а) $c_{16} = c_1 \cdot q^{15}$; б) $c_{30} = c_1 \cdot q^{29}$; в) $c_{126} = c_1 \cdot q^{125}$; г) $c_k = c_1 \cdot q^{k-1}$; ф) $c_{k+8} = c_1 \cdot q^{k+7}$; д) $c_{2k} = c_1 \cdot q^{2k-1}$; е) $3c_1 \cdot q^{40}$; ё) $2c_1 \cdot q^{80}$; ж) $c_1 \cdot q^{20}$; з) $c_1 \cdot q^{k+5}$; и) $c_1 + q^7$; к) $c_1 \cdot q^6(1+q^{14})$. **454.** а) $\frac{5}{4}$; б) $-\frac{10}{9}$; в) $32\sqrt{2}$; г) 0,16; ф) 4352; д) 97656250; ё) -1000; ж) $\frac{81}{16}$; з) $\frac{8}{27}$; и) $\frac{24}{5\sqrt{3}}$. **455.** а) $b_7 = 1458$, $b_n = (-2) \cdot (-3)^{n-1}$; г) $b_7 = -12$, $b_n = -12 \cdot (-1)^{n-1}$; д) $b_7 = \frac{1}{48828125}$, $b_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{2n-3}$, ё) $b_7 = 729a^7$, $b_n = 3^{n-1}a^n$. **456.** а) $\frac{1}{81}$; б) $\frac{56}{125}$; в) $\frac{2}{729}$; г) $\frac{1}{128}$; г) $\frac{2}{729}$ ж) 1. **457.** а) 3 ё -3; б) 0,6 ё -0,6; в) -2; г) 4. **458.** а) $\frac{1}{25}$; б) -162; в) -0,001; ё 0,001; г) 78732; ф) 0,00001536. **459.** 18; 54; 162; 486. **460.** 4; 16; 64. **461.** $x_2 = \frac{1}{4}$; $x_3 = \frac{1}{8}$; $x_4 = \frac{1}{16}$; $x_5 = \frac{1}{32}$. **462.** а) 3; ± 2 ; б) 3; 2 ё 24; $\frac{1}{2}$. **463.** ≈ 2025 сомонику 92 дирам. **464.** а) 9 ва -11; б) ± 5 в) 1 ва 16. **466.** а) $a^3 + b^3$; б) $\frac{c}{2n}$; в) $\frac{1}{m-n}$. **467.** 200 рӯз. **468.** Намунаи матн. Дарозии росткунча нисбат ба бараши 16 м дарозтар буда, масоҳати ба 7680 м² баробарро дорад. Бари росткунчаро ёбед. **469.** (0; 8). **470.** а), г) - ба боло; б), в) - ба поён. **471.** Нишондод. Маълум аст, ки ҳангоми $a \neq 0$ будан, $a^2 - a + 1 = 0$ -ро ба намуди $a + \frac{1}{a} = 1$ овардан мумкин аст. Азбаски $a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1) = 0$ мешавад, пас $a^3 = -1$. Аз ин ҷо, $a^{2000} + \frac{1}{a^{2000}} = (a^3)^{666} \cdot a^2 + \frac{1}{(a^3)^{666} \cdot a^2} = a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = -1$. Ҷавоб: -1. **473.** а) -10,5; б) 292,5; в) $-\frac{20}{27}$; г) -170; г) -240; д) $\frac{15}{8}$; з) 60. **474.** а) $\frac{63}{2}$; б) 624,992; в) 6560; г) -15; ф) 13,75; д) 10,18875. **475.** а) $13,8 \cdot (3^n - 1)$; б) $8 \cdot (2^n - 1)$; г) $\frac{2}{15} \cdot (4^n - 1)$; е) $3 \cdot (3^n - 1)$. **476.** а) $(3^{2n} - 1) : 8$; в) $S_n = \frac{1}{3} \left[(-1)^n \cdot \frac{1}{2^{n-1}} - 2 \right]$; г) $\frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1}$; е) $\frac{x^4 \cdot (x^{-2n} - 1)}{1 - x^2}$; ж) $-\frac{1}{3} [(-2)^n - 1]$; ф) $-0,3 [(-3)^n - 1]$. **477.** а) 133; б) $25\frac{34}{81}$;

в) $\frac{400}{3}$; г) $-274,5$. 478. а) 62; б) 20. 479. а) $q=3$; $S_1=2186$; б) $q=-\frac{1}{2}$; $S_5=50,4$. 480. а) $a_1=\frac{1}{3}$; $S_6=6\frac{89}{96}$; б) $a_1=3$; $S_8=65535$. 481. а) $a_1=3$; $a_1=768$; б) $a_1=1$; $a_{12}=2048$. 482. $S_{10}=59048$. 483. $S_7=5461$. 484. 13. 485. $b_2=8$. 486. 2186. 487. $S_6=1260$. 488. 26 детал; 38 детал ва 40 детал. 489. а) $2x^3-14x^2-6x+7$; б) $20b^4-12b^3+8b^2+2$; в) $1,5y^3-3,6y^2+9y-3$; г) $-10y+5$; г) $2x+1$; д) $-7b^2+4c^2$. 490. а) 3721; б) 998001; в) 98,01; г) 39601; г) 492804; д) 104,4. 492. Хангоми $a=3$, $b \neq 5$ будан, система ҳамчоя нест, вале хангоми $a=3$ ва $b=5$ будан, дорои ҳалли бешумор мешавад. 493. $x \in (1; +\infty)$. 494. а) $15 \cdot 2^n$; б) $15 \cdot 4^{n-1}$; в) $5^n(5^n+1)$. 495. а) $(-\infty; \frac{1}{4})$ - афзуншаванда. $(\frac{1}{4}; +\infty)$ - камшаванда; б) $(-\infty; -1)$ - камшаванда. $(-1; +\infty)$ - афзуншаванда. 496. $x_{\max}=1$, $y_{\max}=4$. 497. 50 км/соат. 498. а) $\frac{81}{2}$; б) $-6,4$; в) 5; г) $-\frac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$; г) $\frac{16}{2\sqrt{2}-1}$; д) $\frac{15\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$; ё) $4+3\sqrt{2}$; ж) $\frac{3(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{3}-1}$; з) $\frac{1}{2}$; и) $\frac{64}{3}$; к) -9 . 499. а) $\frac{96}{5}$; б) $-\frac{3}{5}$; в) $\frac{1}{a(1-a)}$; г) $-\frac{1}{a(a+1)}$. 500. а) $\frac{9}{5}$; б) $-\frac{1}{a^2 \cdot (1+a^3)}$; в) $\frac{4}{7}$; г) $\frac{25}{4}$; г) 36; д) $\frac{11}{12}$. 501. $S=6$ ё $S=12(3+2\sqrt{2})$. 502. $b_1=14$, $q=\frac{3}{4}$. 504. $4R\pi$ см ва $\frac{4\pi R^2}{3}$ см². Нишондод, Вобастагии байни радиуси давраи дарункашидашуда ва берункашидашуда ро бо тарафи секунҷаи мунтазам ($a=\sqrt{3}R$, $a=2\sqrt{3}r$, $R=2r$) ба ҳисоб гирифта, барои дарозии давраҳо ва масоҳати доираҳо прогрессияҳои беохии геометрии $2\pi R$; $\frac{2\pi R}{2}$; $\frac{4\pi R}{4}$... ($q=\frac{1}{2}$) ва πR^2 ; $\frac{\pi R^2}{4}$; $\frac{\pi R^2}{16}$; ... ($q=\frac{1}{4}$) -ро ҳосил кардан мумкин аст. Суммаҳои ин прогрессияҳо суммаҳои матлубро ифода мекунам. 505. $\frac{\pi b^2}{2}$ см². Нишондод. Азбаски вобастагии радиуси давраи дарункашидашуда бо тарафи квадрат $r=\frac{a}{2}$ аст, пас барои масоҳатҳои ҳамаи доираҳо прогрессияи геометрии $\frac{\pi b^2}{4}$; $\frac{\pi b^2}{8}$; $\frac{\pi b^2}{16}$; ... ($q=\frac{1}{2}$) -ро ҳосил мекунем, ки ёфтани суммааш талаботи масъаларо қоне мегардонад. 506. $q=\frac{2}{5}$. 507. $b_5=3 \cdot 8^{-4}=\frac{3}{4096}$. 508. 5; 4; $\frac{16}{5}$; $\frac{64}{25}$; ... ва 45; -36; $\frac{144}{5}$; ... 509. а) $\frac{8}{9}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{26}{99}$; г) $2\frac{71}{99}$; г) $\frac{7}{30}$; д) $\frac{907}{1100}$; ё) $\frac{5}{9}$; ж) $1\frac{8}{11}$; и) $\frac{7}{15}$; к) $\frac{37}{3300}$; н) $\frac{433}{3300}$; п) $\frac{59}{450}$. 510. а) $\frac{1}{2y^2}$; б) $\frac{2}{3} \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$. 511. Нишондод. Фарқи $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ -ро ба намуди $\left(\frac{a-b}{ab}\right)^2 \cdot (a+b)$ оварда, боварӣ ҳосил кардан мумкин аст, ки он

гайриманфист. **512.** а) $\frac{2}{3}(3 + \sqrt{3})$; б) $\frac{5}{6}(3 - \sqrt{3})$; в) $\frac{6}{23}(5 + \sqrt{5})$. **513.** а) ток; б) чуфт; в) чуфт; г) ток. **514.** $S(x)=4x-x^2$. **515.** 21,6 км/соат; 23,1 км/соат. **517.** а) $\forall x \in (1; \frac{4}{3})$; б) $\forall x \in [-3; 3]$. **518.** 429. **519*.** $a=4$; $b=12$; $c=36$ ё $a=\frac{4}{9}$; $b=-\frac{20}{9}$; $c=\frac{100}{9}$. *Нишондод.* Бигзор, ададҳои матлуб a , aq ва aq^2 бошанд. Он гоҳ, мувофиқи шарт масъала ба системаи дуомаълумадори муодилаҳои $2(aq+8)=a+aq^2$, $(aq+8)^2=a \cdot (aq^2+64)$ меоём. **520.** 2; 14; 98. **521.** 7; 21; 63; $b_7=5103$. **522.** $q=\frac{1}{3}$. **523.** *Нишондод.* Бигзор, a , b , c ва a^2 , b^2 , c^2 бошанд. Ба ибораи дигар $2b=a+c$ ва $b^4=a^2 \cdot c^2$. Агар муодилаи якумро ба квадрат бардошта, муодилаи дуумро дар шакли $b^2=|a \cdot c|$ нависем, он гоҳ муқоисаи тарафҳои чапи муодилаҳои ҳосилгашта ба $a^2+2ac+c^2=4|a \cdot c|$ меорад. Агар a ва c аломатҳои якхела дошта бошанд, он гоҳ $a=c$ ва аз ин ҷо прогрессияи геометрии дорои маҳраҷи ба 1 баробар мешавад. Агар a ва c аломатҳои гуногун дошта бошанд, он гоҳ $a^2+bac+c^2=0$ ва ё $\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{c}{a}\right) + 1 = 0 (a \neq 0)$ -ро ҳосил мекунем. Онро ҳал карда, $\frac{c}{a} = -3 \pm \sqrt{8}$ -ро меёбем. Азбаски $\frac{c^2}{a^2} = q^2$ аст, пас $q^2 = (-3 \pm \sqrt{8})^2$ мешавад. Ададҳои a^2 , b^2 , c^2 мусбатанд, пас q низ қалон аз 0 мешавад. Аз ин ҷо $q_{2,3} = -3 \pm \sqrt{8}$ ҳосил мегардад. Ҷавоб: $q_1=1$; $q_{2,3} = -3 \pm \sqrt{8}$. **524.** $+3$; 5; 7; ...; $+5$; 10; 20; **525.** $+3$; 6; 12; 24; ...; $+1$; 3; 5; 7; **528.** 50 мм. **529.** 5 ва 6 ё -5 ва -4 . **531.** а) $\frac{a-2}{a-6}$; б) $\frac{1}{a^2+2}$; в) $\frac{x^4+1}{x+1}$; г) x^2-1 . **532.** а) $\forall x \in (-\infty; -1] \cup (2; +\infty)$; б) $\forall x \in (-\infty; -1] \cup (1; 3)$. **533.** а) 4; б) 1; $\frac{9}{2}$; в) вучуд надорад. ***534.** *Нишондод.* Бигзор, насоси якум хавзро бо об дар x соат пур кунад. Пас, он дар 1 соат $\frac{1}{x}$ - ҳиссаи хавзро пур мекунад. Насоси дуум бошад $\frac{1}{x+10}$ - ҳиссаи хавзро пур мекунад. Азбаски мувофиқи шарт ҳар ду насос дар як соат $\frac{1}{12}$ - ҳиссаи хавзро пур мекунанд, пас $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+10} = \frac{1}{12}$ мешавад. Ҷавоб: 30 соат. **535.** а) 8; 9; 10; 11; 12; 13; ...; б) 3; 5; 9; 17; 33; 65; в) $-\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{4}$; $-\frac{7}{8}$; $-\frac{15}{16}$; $-\frac{31}{32}$; $-\frac{63}{64}$; г) 5; $\frac{5}{2}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{5}{4}$; 1; $\frac{5}{6}$;

р) $1; 2; 1; \frac{1}{4}; \frac{1}{25}; \frac{1}{216}$; д) $1; -\frac{1}{4}; \frac{1}{27}; -\frac{1}{256}; \frac{1}{3125}; -\frac{1}{46656}$; е) $1; 6; 18; 40; 75; 126$; ж) $\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{12}; \frac{1}{20}; \frac{1}{30}; \frac{1}{42}$; з) $1; \frac{1}{8}; \frac{1}{27}; \frac{1}{64}; \frac{1}{125}; \frac{1}{216}$; и) $1; 0; 1; 4; 9; 16$; к) $-4; 16; -64; 256; -1024; 4096$; л) $0; -7; -26; -63; -124; -215$. **536.** $a_1=5, a_2=19, a_3=57; a_4=131$. Ададҳои $-7; 178; 217; 305; 397; 401$ ба пайдарпайии (a_n) тааллуқ надоранд. **537.** $a_3=15; a_{10}=197; a_{13}=335; a_{15}=447$. **538.** Адади $-1,3$ аъзои пайдарпайи шуда наметавонад, вале $-3,3$ аъзои ёздаҳуми прогрессия аст: $a_{11}=-3,3$. **539.** а) $a_n=3,5_n-2,5$; б) $a_n=2^{n-1}-1$. **540.** а) ҳа; $d=-3$; б) ҳа; $d=-1,5$; в) ҳа; $d=3$; г) ҳа; $d=-5$; г) ҳа; $d=-0,1$; д) ҳа; $d=0,2$; е) не; ё) ҳа; $d=4$; ж) ҳа; $d=7$; з) не; и) ҳа; $d=-2$; л) не; м) не; н) ҳа; $d=3,3$. **541.** $a_1=5$, **542.** а) $a_8=32$; б) $a_{31}=127$; в) $a_{81}=241$; г) $a_{20}=0,066$. **543.** а) $a_1=-6; d=5$, б) $a_1=23; d=3$; в) $a_1=10; d=-1$; г) $b_1=123; d=-12$; г) $c_1=1; d=4$; д) $x_1=-1; d=-7$. **544.** а) $a_{31}=157$; б) $a_{301}=-119,2$. **545.** а) $d=4,2$; б) $d=2\frac{5}{18}$. **546.** $n=39$. **547.** а) $S_{18}=900$; б) $S_{12}=1062$. **548.** а) $a_1=143, S_{20}=3430$; б) $a_1=44,25, S_{50}=1906,25$. **549.** а) $x=81$. *Нишондод.* Тарафи чапи муодила суммаи прогрессияи арифметикиро бо нишондодҳои $a_1=1, a_n=x$ ва $d=4$ ифода мекунад. Барои ёфтани n муодилаи $x=1+(n-1) \cdot 4$ -ро ҳосил мекунем. Аз он $n=\frac{x+3}{4}$ мебарояд. Муодила ба муодилаи баробарқувваи $\frac{1+x}{2} \cdot \frac{x+3}{4} = 861$ иваз мешавад, ки аз он муодилаи ислоҳшудаи $x^2+4x-6885=0$ пайдо мегардад; б) $x=55$. **550.** а) $1; 4; 7; 10; 13; \dots$; б) $2; -1; -4; -7; -10; \dots$; в) $-2; 5; 12; 19; \dots$. **551.** **62.** **552.** 2360 . **553.** $n=4$. **554.** $n=4$. **555.** а) $S_n=(n-6) \cdot n$; б) $S_n=4n \cdot (n+1)$; в) $S_n=\frac{n}{2} \cdot (9-n)$. **556.** а) $S_{45}=2133$; б) $S_{45}=-900$. **557.** $\div 17; 19,5; 22; 24,5; 27; 29,5; 32; S_7=171,5$. **558.** $\div -12; -7; -2; 3; S_4=-18$. **559.** ҳа; $a_n=3_n-11, d=3$. **560.** $n=75$. **562.** а) не; б) не; в) ҳа; г) ҳа. **563.** а) $b_1=2$; б) $b_1=3$; в) $b_1=36$; г) $b_1=-1$; г) $b_1=3$; д) $b_1=2,1$; е) $b_1=0,5$; ё) $b_1=32$. **564.** а) $q=4$; б) $q=2$; в) $q=3$. **565.** а) $b_1=\frac{48}{5}, q=-\frac{3}{2}$; б) $b_1=-150, q=5$; в) $b_1=\frac{375}{61}, q=\frac{6}{5}$; г) $b_1=2, q=3$ ё $b_1=54, q=\frac{1}{3}$; г) $b_1=1, q=2$. **566.** $\pm 6,3$. **567.** $b_2=27$ ё $b_2=-27$. **568.** $b_2=2, b_3=4, b_4=8$. **569.** а) $20; 40; 80; \dots$; б) $-33; 66; -132; 264; \dots$; в) $3; 6; 12; 24; \dots$. **570.** $b_1=2$. **572.** а) 4 . **573.** $S_{10}=3069, S_n=3(2^n-1)$;

б) $S_{10}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$. **574.** $b_4=\frac{21}{4}$. **575.** $S_4=\frac{15}{4}$. **576.** $S_6=\frac{63}{8}$. **577.** $S_{10}=699050$. **578.** $S_6=2730$. **579.** а) $\frac{7}{12}$. Нишондод. Касри додашударо дар шакли $0,58(3)=\frac{58}{100}+\left(\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\dots\right)$ менависем. Ифодаи дар дохили кавсбуда прогрессияи геометрии бохири камшавандаро бо $b_1=0,003$ ва



Расми 96

$q=0,0003:0,003=0,1$ ифода мекунад. Аз ин ҷо $0,58(3)=\frac{58}{100}+\frac{0,003}{1-0,1}=\frac{58}{100}+\frac{0,003}{0,9}=\frac{58}{100}+\frac{0,03}{9}=\frac{58}{100}+\frac{1}{300}=\frac{175}{300}=\frac{7}{12}$ мешавад б) $3\frac{14}{55}$; в) $1\frac{329}{990}$; г) $12\frac{1}{12}$; ғ) $\frac{7}{9}$; д) $\frac{229}{990}$

580. Нишондод. Ба расми 96 диққат намуда, меёбем: $S_1=S_{\triangle ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

$$S_2=S_{\triangle MNP}=\frac{a^2\sqrt{3}}{16}; \quad S_3=S_{\triangle KLF}=\frac{a^2\sqrt{3}}{64}; \dots$$

$$S_n=\frac{a^2\sqrt{3}}{4^n}; \quad S_{n+1}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4^{n+1}}, \quad \frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{1}{4}=const.$$

Пас, пайдарпайии (S_n) прогрессияи геометрии бо маҳраҷи $q=\frac{1}{4}<1$ мешавад. Аз ин ҷо, $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\frac{a^2\sqrt{3}}{3}=\frac{a^2}{\sqrt{3}}$ -ро ҳосил мекунем. **581.**

$$\frac{5\sqrt{2}}{2}; 5\sqrt{2}; 10\sqrt{2}; 20\sqrt{2}. \text{ **582.** } 3; 6; 12; 24. \text{ **583}^*. \div -81; 9; -1; \frac{1}{9}; -\frac{1}{81}; \dots. \text{ **584.** }**$$

$$b_3=18. \text{ **585.** } \div 1; 7; 49; \dots. \text{ **586.** } \div 1; 4; 7; 10; 13; \dots; \div 1; 4; 16; 64; \dots. \text{ **587}^*. 20.**$$

$$\text{ **588.** } 4; 8; 16. \text{ **589.** } 2; 4; 8; 12 \text{ ё } 12,5; 7,5; 4,5; 1,5. \text{ **590.** } \frac{75}{4}; \frac{45}{4}; \frac{27}{4}; \frac{9}{4}; \text{ ё } 3; 6; 12;$$

$$18. \text{ **591.** } \div 4; 7; 10; \div 2; 4; 8. \text{ **592.** } \div 4; -8; -16; -32 \text{ ва } \div -17; -12; -7; -2.$$

ИФОДАҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ ВА ТАБДИЛДИҲИИ ОНҲО

§10. Функсияи тригонометрии кунчи дилҳоҳ

§11. Айниятҳои асосии тригонометрӣ ва татбиқи онҳо

§12. Формулаҳои мувофиқоварӣ

§10. ФУНКСИЯИ ТРИГОНОМЕТРИИ КУНЧИ ДИЛҲОҲ

29. Кунҷҳо, камонҳо ва ченкунии онҳо

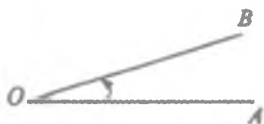
Фигурае, ки дар натиҷаи аз як нуқта баромадани ду нур ташкил ёфтааст, кунҷ номида мешавад.

Ҳар гуна кунҷ ҳангоми дар атрофи ягон нуқтаи ҳамворӣ, ки нуқтаи аввала ном дорад, гардиш додани нур ҳосил шуда метавонад. Масалан, ҳангоми нурро дар атрофи нуқтаи O аз вазъияти аввалаи OA то вазъияти охири OB гардиш додан, кунҷи AOB ҳосил мешавад (расми 97).

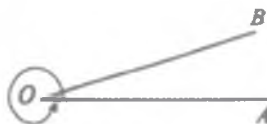
Кунҷ ҳамчун қисми ҳамворӣ ҳисоб карда мешавад, ки вайро нур дар атрофи нуқтаи аввалааш дар ҳамворӣ давр зада, тай кардааст.

Дар вақти гардиш додани нур кунҷе ҳосил шуданаш мумкин аст, ки он аз кунҷи қушод калон аст (расми 98). Гардиши нур аз якҷанд давраи пурра ва кунҷи қисми давраро ташкилдиданда иборат шуда метавонад (расми 99).

Яке аз ду самти имконпазири гардишро дар ҳамворӣ мусбат ва дигари онро манфӣ ҳисоб мекунем. Кунҷи дар натиҷаи ба муқобили самти ҳаракати ақрабаки соат даврзании нур бавучудода, кунҷи мусбат ва кунҷи дар натиҷаи самти ҳаракати ақрабаки соат давр задани нур ҳосилшуда кунҷи манфӣ ҳисоб мешавад.



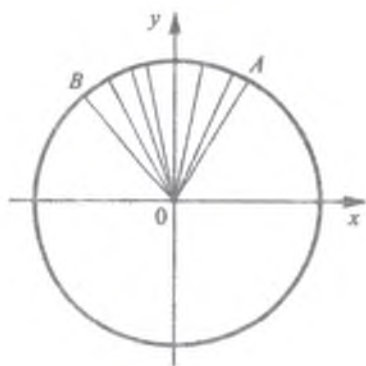
Расми 97



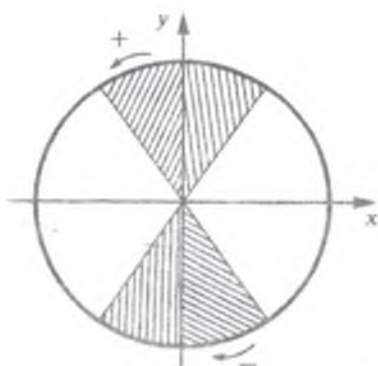
Расми 98



Расми 99



Расми 100



Расми 101

Самтро ҳамчун самти мусбаџи даврзанџи кабул мекунем, ки он ба самти ҳаракати аџрабаки соати дар ҳамворџи гузошташуда муџобил буда, лавҳааш ба мушоҳидакунанда нигаронида шуда бошад.

Вазџияти аввалиџи нури даврзананда тарафи аввалини кунџи мувоџиџи гардиш ва вазџияти охирини нур тарафи охирини кунџи номида мешавад.

Ба ҳар гуна кунџе, ки бо ду радиуси давра ташкил ѳфтааст, камони бо нџғҳои ин радиусҳо маҳлудшудаи давра мувоџиџи меояд (расми 100).

Агар радиуси OA дар аџтрофи маркази O давр занад, он гоҳ нџғи радиуси OA дар рџџи давра давр мезанад. Меџуџянд, ки нуџџа дар рџџи давра ба самти мусбаџ (самти манџџи) ҳаракат мекунад, ба шарте, ки радиуси нуџџтаро ба марказ пайваस्तкунанда ба самти мусбаџ (манџџи) ҳаракат кунад.

Камоне, ки дар натиџаџи аз рџџи давра ба самти мусбаџ ҳаракат кардани нуџџџа ба вуџуд омадааст, камони мусбаџ ва камоне, ки дар натиџаџи аз рџџи давра ба самти манџџи ҳаракат кардани нуџџџа ташкил меѳбад, камони манџџи ҳисоб мешавад (расми 101).

Камонҳое ҳастанд, ки адади дилҳоџи давраҳои пурраи мусбаџ ва манџџиро дарбар меџиранд. Ба ин гуна камон ресмони ба ғалтак печонидашуда мисол шуда метавонад: он метавонад адади дилҳоџи печҳои ба ин ѳ он тараф печонидашударо дарбар ғирад.

Барои џен кардани кунџҳо ягон кунџи муайянро ҳамџун воҳиди џенак кабул карда, ба ѳрии он дигар кунџҳоро џен мекунанд.

Кунџи дилҳоҳро ҳамџун воҳиди џенак кабул кардан мумкин аст. Дар амалиџа бисѳр ваџт кунџро ба ғрадусҳо џен мекунанд. Воҳиди џенак ғрадус 1° буда, ба $\frac{1}{360}$ ҳиссаи гардиши пурра баробар аст.

Барои чен кардани кунҷҳои ченакашон градуси нопурра дақиқаҳо ва сонияҳо истифода мешаванд. Як дақиқа ба $\frac{1}{60}$ хиссаи градус ва як сония ба $\frac{1}{60}$ хиссаи дақиқа баробар аст. Градус ба таври зерин ишорат мешавад:

$$1' = \frac{1}{60}^\circ; \quad 1'' = \frac{1}{60}';$$

Бузургии кунҷи мусбат бо адади мусбат ва кунҷи манфӣ бо адади манфӣ ифода карда мешавад.

Дар вақти чен кардани камонҳои давраи додашуда ҳамчун воҳид камонеро қабул менамоянд, ки ба он кунҷи марказии ба воҳиди ченак қабулкардашуда таъя мекунад. Дар ин маврид бузургии кунҷи марказӣ ба бузургии камоне, ки ба вай ин кунҷ таъя мекунад, дар воҳидҳои кунҷӣ ва камонӣ, мувофиқан, бо як ҳел адад ифода карда мешавад.

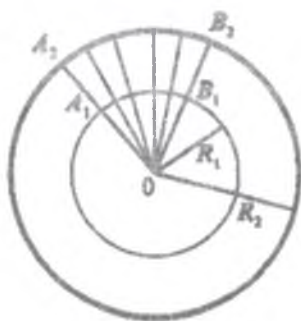
Агар як кунҷи марказӣ бо камонҳои ду давра таъя кунад, он гоҳ дарозии камонҳои ин ду давра ҳамчун дарозии радиусҳои онҳо нисбат доранд (расми 102).

Инак, дар вақти ягона будани кунҷи марказӣ нисбати дарозии камони давра ба радиуси он ба бузургии радиус вобаста нест.

Т а ъ р и ф. Нисбати дарозии камони давра, ки барои он кунҷи додашуда кунҷи марказӣ аст, ба дарозии радиуси ҳамин давра ченаки радиани кунҷ номида мешавад.

Дар вақти ченкунии радиани кунҷҳо ҳамчун воҳиди ченаки кунҷи марказии мусбат қабул карда мешавад, ки он ба камони дарозии ба радиус баробар таъя мекунад. Ин кунҷ *радиан* номида мешавад (расми 103).

Барои ченкунии радиани камонҳои давра радиани камонӣ ҳамчун воҳид қабул карда шудааст; ин камонест, ки аз ҷиҳати дарозӣ ба радиус баробар мебошад.



Расми 102



Расми 103

Ченаки радианиии гардиши пурра ба нисбати дарозии давра бар радиус баробар аст. $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi = 6,283185 \dots$

Хотиррасон мекунем, ки қимати радиани $\pi \approx 3,14$ мебошад.

Ченаки радианиии $1^\circ \frac{2\pi R}{360}$ ба $\frac{\pi}{180} = 0,1017453\dots$ баробар аст.

Агар кунҷ A° бошад, он гоҳ андозаи радианиии вай a ва $a = \frac{A^\circ \pi}{180} = \frac{A\pi}{180}$ баробар аст

$$1' = \frac{1}{60} \text{ (градус)} = \frac{1}{60} \cdot \frac{\pi}{180} \text{ (радиан)} = 0,00029088 \text{ (радиан)}.$$

Аз баробарии $a = \frac{A^\circ \pi}{180}$ маълум аст, ки кунҷи ба a радиан баробар чунин мешавад: $A^\circ = a \frac{180^\circ}{\pi}$.

Аз ҷумла 1 радиан $= \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,295 \text{ (градус)} \approx 3438' \approx 206265'' \approx 57^\circ 17' 45''$. Барои ифода намудани андозаи радианиии кунҷҳо ва камонҳо бузургии кунҷ (ё камон) ба радианҳо ифода карда мешавад. Ба ҷойи калимаҳои «кунҷи ба адади a ченкардашаванда» мухтасар «кунҷи a » мегӯянд. Масалан, кунҷи бузургииаш ба 0,5 радиан нагуфта, «кунҷи 0,5» мегӯянд.

Мисоли 1. Андозаи радианиии $A = 150^\circ$ -ро меёбем.

$$\text{Ҳа л. } 150^\circ = 150 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ радиан} = \frac{5\pi}{6} \text{ радиан}.$$

Мисоли 2. Андозаи градусии $a = 4,5$ радианро меёбем.

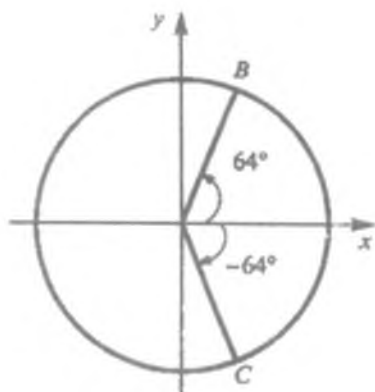
$$\text{Ҳа л. } 4,5 \text{ радиан} = 4,5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 258^\circ.$$

Мисоли 3. Дарозии камони даврас, ки радиусааш ба 16 см баробар буда, камонаш $\frac{\pi}{4}$ радианро ташкил медиҳад, меёбем.

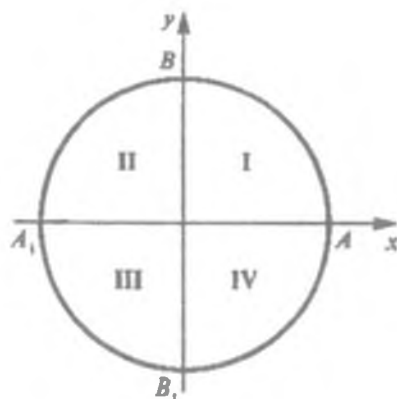
Ҳа л. Дарозии камоне, ки дорои k -радиан аст бо формулаи $C = k \cdot R$ ҳисоб карда мешавад, бинобар ин $C = 16 \cdot \frac{\pi}{4} = 4 \text{ см}$.

Андозаи радианиии баъзе кунҷҳоеро, ки бисёр воқеаҷӯранд, дар ҷадвали зерин нишон медиҳем:

Градус	30°	45°	60°	90°
Радан	$\frac{\pi}{6} \approx 0,5236$	$\frac{\pi}{4} \approx 0,7854$	$\frac{\pi}{3} \approx 0,0472$	$\frac{\pi}{2} \approx 1,5708$
Градус	180°	270°	360°	
Радан	$\pi \approx 3,1416$	$\frac{3\pi}{2} \approx 4,7124$	$2\pi \approx 6,2832$	



Расми 104



Расми 105

Дар ҳамворӣ самти мусбати даврзаниро муайян карда, дар он тирҳои координатахоро интиҳоб мекунем. Дар тири Ox аз рости ибтидои координатаҳо нуқтаи A -ро нишона мекунем ва аз он давраи марказаш дар нуқтаи O -ро мегузаронем (расми 104). Радиуси OA -ро радиуси ибтидоӣ меномем.

Радиуси ибтидоиро дар атрофи нуқтаи O ба муқобили ҳаракати акрабаки соат ба 64° гардиш медиҳем. Ин радиус ба радиуси OB бадал мешавад. Кунҷи гардиш ба 64° баробар аст. Агар радиуси ибтидоиро дар атрофи O бо самти акрабаки соат ба 64° гардиш диҳем, он гоҳ он ба радиуси OC бадал мешавад. Дар ин ҳолат кунҷи гардиш ба -64° баробар аст. Ин кунҷҳо дар расм бо тирчаҳо нишон дода шудаанд.

Аз курси геометрия маълум аст, ки кунҷ ба ҳисоби градусҳо бо ададҳои аз 0 то 180° ифода карда мешавад. Кунҷи гардиш ба ҳисоби градусҳо бо ададҳо $-\infty$ то $+\infty$ ифода карда мешавад. Масалан, агар радиуси ибтидоиро ба муқобили самти ҳаракати акрабаки соат ба 180° ва боз ба 50° гардиш диҳем, он гоҳ кунҷи гардиш ба 230° баробар мешавад. Агар радиуси ибтидоӣ ба муқобили ҳаракати акрабаки соат як гардиши пурра кунад, он гоҳ кунҷи гардиш ба 360° баробар мешавад, агар ин радиус ба ҳамон самт якуним гардиш кунад, он гоҳ кунҷи гардиш ба 540° баробар мешавад ва Ҳоказо.

Агар тарафи охири кунҷ дар дохили ягон чоряки ҳамворӣ бошад, он гоҳ мегӯянд, ки кунҷи додашуда дар ҳамин чоряк таъом мешавад.

Чорякҳои I ва II якҷоя нимдоираи болоӣ, чорякҳои III ва IV нимдоираи поёниро ташкил мекунанд, Чорякҳои I ва IV нимдоираи рост, чорякҳои II ва III нимдоираи чапро ташкил медиҳанд (расми 105). Агар $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ бошад, он гоҳ α кунҷи чоряки I аст; агар

$90^\circ < a < 180^\circ$ бошад, он гоҳ a кунчи чоряки II аст; агар $180^\circ < a < 270^\circ$ бошад, он гоҳ a кунчи чоряки III аст. Ҳангоми ба кунҷ чамъ шудани адади бутуни гардишҳо кунҷи ҳамон чорякҳо ҳосил мешавад. Масалан, кунҷи 430° кунҷи чоряки I мебошад, чунки $430^\circ = 360^\circ + 70^\circ$ ва $0^\circ < 70^\circ < 90^\circ$ аст, кунҷи 920° кунҷи чоряки III аст, чунки $920^\circ = 360^\circ \cdot 2 + 200^\circ$ ва $180^\circ < 200^\circ < 270^\circ$ мебошад.

Кунҷҳои 0° , $\pm 90^\circ$; $\pm 180^\circ$; $\pm 270^\circ$; $\pm 360^\circ$, ... ба ҳеҷ як чоряк тааллуқ надоранд.

?

1. Андозаи ченакҳои кунҷро номбар кунед. 2. Бузургии кунҷ ба k градус баробар аст. Бузургии ин кунҷро бо радиан ифода кунед. 3. Бузургии кунҷ ба k радиан баробар аст. Бузургии ин кунҷро бо градус ифода кунед. 4. Кунҷҳои 1800° , 3600° -ро бо радианҳо ифода намоед.

Машиқҳо барои такрор

593. Қимати ифодаи $\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}-y^{-1}} \cdot \frac{xy^2}{x+y}$ -ро ҳангоми $x=0,12$ ва $y=0,5$ будан ёбед.

594. Муодиларо ҳал намоед:

$$a) \frac{2}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x-1}{x^3+1}; \quad b) \frac{3x-30}{x^3-8} - \frac{10}{x^2+2x+4} + \frac{2}{x-2} = 0.$$

595. Суммаи прогрессияи беохири $2; -\frac{2}{3}; \frac{2}{9}; -\frac{2}{27} \dots$ -ро ёбед.

30. Таърифи синус, косинус, тангенс ва котангенс кунҷи дилҳо

Ба мо маълум аст, ки агар дар секунҷаи росткунҷаи ABC -и додашуда a кунҷи тези ба гипотенуза часпида бошад (расми 106), он гоҳ

$$\sin \alpha = \frac{b}{c}; \quad \cos \alpha = \frac{a}{c}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b} \text{ мешавад.}$$

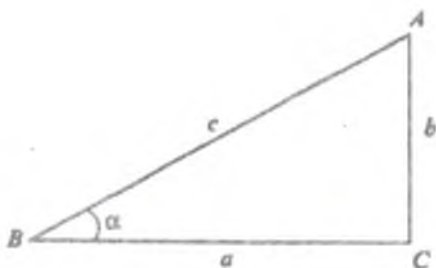
Акнун, таърифи синус, косинус, тангенс ва котангенсро ҳангоми дилҳо будани кунҷи α меорем.

Бигзор, ҳангоми дар атрофи нуқтаи O ба кунҷи α гардиш додани радиуси ибтидоии OA он ба радиуси OB бадал шавад (расми 107).

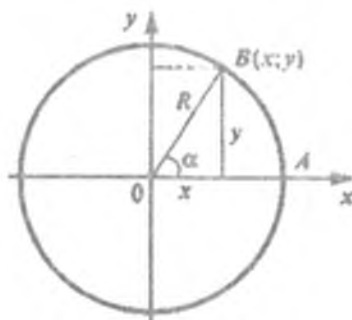
Нисбати ординатаи нуқтаи B ба дарозии радиус синуси кунҷи α номида мешавад:

$$\sin \alpha = \frac{y}{R}$$

Нисбати абсиссаи нуқтаи B ва дарозии радиус косинуси кунҷи α номида мешавад: $\cos \alpha = \frac{x}{R}$



Расми 106



Расми 107

Нисбати ординатаи нуқтаи B ба абсиссаи он тангенс кунчи α номида мешавад:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x};$$

Нисбати абсиссаи нуқтаи B ба ординатаи он котангенс кунчи α номида мешавад:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}.$$

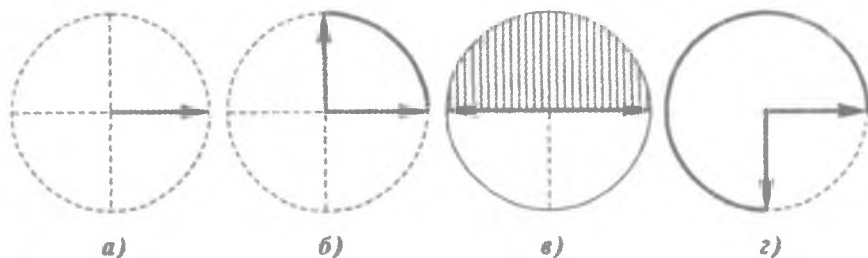
Функсияҳои синус, косинус, тангенс ва котангенсро *функсияҳои тригонометрӣ* меноманд; кунчи α аргументи онҳо ном дорад. Ифодаҳои $\sin \alpha$ ва $\cos \alpha$ барои қиматҳои дилхоҳи α муайян мебошад, чунки барои кунчи дилхоҳи гардиш қиматҳои мувофиқи касрҳои $\frac{y}{R}$ ва $\frac{x}{R}$ -ро ёфтан мумкин аст. Ифодаи $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$ ҳамон вақт тартиб дода мешавад, ки агар $x \neq 0$ бошад.

Агар $x=0$ бошад, пас ин нисбатро тартиб додан имконнопазир аст (ба нул тақсим кардан маъно надорад); дар ин маврид тарафи охири кунҷ ба дарозии тири ордината раван мешавад ва $d = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ё бо ифодаи градуси $\alpha = 90^\circ + 180^\circ k$ (k - адади дилхоҳи бутун аст). Барои кунҷҳои $k\pi$ (ё бо градусҳои $180^\circ \cdot k$) тарафи охирин ба дарозии тири абсисса раван мешавад: нисбати $\frac{x}{y}$ маънои худро гум мекунад, чунки $y=0$ мешавад; барои ин кунҷҳо котангенс вучуд надорад.

Қиматҳои функсияҳои тригонометрии баъзе кунҷҳоро дида мебароем. Агар кунчи $\alpha=0$ бошад (расми 108, а), он гоҳ $x=1$, $y=0$ мешавад.

Бинобар ин, $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\operatorname{tg} 0 = \frac{y}{x} = 0$, $\operatorname{ctg} 0$ вучуд надорад.

Агар кунчи $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (ё бо градусҳои $\alpha = 90^\circ$) бошад, он гоҳ $x=0$, $y=1$ мешавад (расми 108, б). Бинобар ин, $\cos \frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0$; $\sin \frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = 1$; $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \operatorname{tg} 90^\circ$ вучуд надорад; $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = \operatorname{ctg} 90^\circ = 0$.



Расми 108

Агар $\alpha = \pi$ (расми 108, в) бошад, он гоҳ $x = -1$; $y = 0$ мешавад, бинобар ин, $\cos \pi = \cos 180^\circ = -1$; $\sin \pi = \sin 180^\circ = 0$, $tg \pi = tg 180^\circ = 0$; $ctg \pi = ctg 180^\circ$ вучуд надорад.

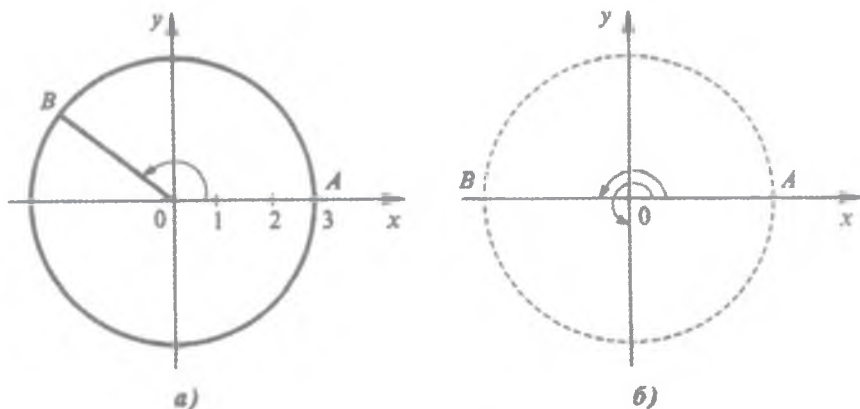
Агар $\alpha = \frac{3}{2}\pi$ (расми 108, г) бошад, он гоҳ $x = 0$; $y = -1$ мешавад, бинобар ин, $\cos \frac{3}{2}\pi = \cos 270^\circ = 0$; $\sin \frac{3}{2}\pi = \sin 270^\circ = -1$; $tg \frac{3}{2}\pi = tg 270^\circ$ вучуд надорад; $ctg \frac{3}{2}\pi = ctg 270^\circ = 0$ аст.

Доир ба ҳисоб кардани қиматҳои функсияҳои тригонометрӣ мисолҳо меорем.

Мисол 4. Қиматҳои тақрибии $\sin 110^\circ$, $\cos 110^\circ$, $tg 110^\circ$ ва $ctg 110^\circ$ -ро бо ёрии нақша меёбем.

Давраи марказаш ибтидои координатаҳои радиусаш $OA = R = 3$ -ро месозем (расми 109). Радиуси OA -ро ба 110° гардиш медиҳем. Радиуси OB ҳосил мешавад. Координатаҳои нуқтаи B , яъне x ва y -ро аз расм меёбем:

$$x = -1,05, \quad y = 2,80.$$



Расми 109

Аз ин ҷо:

$$\sin 110^\circ = \frac{y}{R} = \frac{2,80}{3} \approx 0,93,$$

$$\operatorname{tg} 110^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-2,80}{1,05} \approx -2,7.$$

$$\cos 110^\circ = \frac{x}{R} = \frac{-1,05}{3} \approx -0,35,$$

$$\operatorname{ctg} 110^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1,05}{2,80} \approx -0,38.$$

Акнун, ҷадвали киматҳои функсияҳои тригонометриро барои баъзе кунҷҳо меорем.

a	0	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	$2\frac{\pi}{3}$ (120°)	$3\frac{\pi}{4}$ (135°)	$5\frac{\pi}{6}$ (150°)	π (180°)
$\sin a$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos a$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} a$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	вучуд надорад	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} a$	вучуд надорад	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	вучуд надорад

a	0	$7\frac{\pi}{6}$ (210°)	$5\frac{\pi}{4}$ (225°)	$4\frac{\pi}{3}$ (240°)	$3\frac{\pi}{2}$ (270°)	$5\frac{\pi}{3}$ (300°)	$7\frac{\pi}{4}$ (315°)	$11\frac{\pi}{6}$ (330°)	2π (360°)
$\sin a$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos a$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} a$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	вучуд надо- рад	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} a$	вучуд надорад	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	вучуд надорад

Мисоли 5. Аломати ҳосили зарбро муайян мекунем.

$$\sin 67^\circ \cdot \cos 267^\circ \cdot \cos 375^\circ \cdot \sin(-68^\circ) \cdot \cos(-68^\circ) \cdot \sin 2.$$

Ҳа л. $\sin 67^\circ < 0$ чунки кунҷи 67° дар чоряки якум ҷойгир аст, синус дар чоряки якум мусбат мебошад.

$\cos 267^\circ < 0$ чунки кунҷи 267° кунҷи чоряки се аст, косинус дар ин чоряк манфӣ мебошад.

$\cos 375^\circ > 0$, чунки кунчи 375° кунчи чоряки якум мебошад, косинус дар ин чоряк мусбат аст.

$\sin(-68^\circ) < 0$, чунки кунчи -68° кунчи чоряки чорум аст, синус дар ин чоряк манфӣ мебошад.

$\cos(-68^\circ) > 0$, чунки кунчи -68° дар чоряки чорум ҷойгир аст, косинус дар ин чоряк мусбат аст.

$\sin 2 > 0$ чунки кунче, ки бузургиаш ба 2 радиан баробар аст, кунчи чоряки дуум мебошад, синус дар чоряки дуум мусбат аст. Бинобар ин, ҳосили зарб мусбат мебошад.



1. Радиан чист? 2. Кунҷҳои 30° , 45° , 60° , 90° -ро бо радианҳо ифода намоед. 3. Таърифи синус, косинус, тангенс ва котангенс кунчи α -ро гуед. 4. Ифодаҳои $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ барои кадом қиматҳои α маъно доранд?

596. Кунчи додашударо бо радианҳо ифода намоед.

- а) 1° ; в) 45° ; г) 120° ; е) 320° ; ж) 1000° .
б) 15° ; г) 70° ; д) 150° ; ё) 315° ;

597. Кунчи додашударо бо градусҳо ифода намоед:

- а) $\frac{\pi}{15}$; б) $-\frac{\pi}{8}$; в) $\frac{2\pi}{3}$; г) $\frac{11\pi}{6}$; г) $0,25\pi$; д) $-\frac{31}{6}\pi$;

598. Кунчи зерин дар кадом чоряк тамом мешавад:

- а) $\frac{\pi}{3}$; б) $-\frac{2\pi}{3}$; в) $21\frac{\pi}{4}$;

599. Қимати ифодаро ёбед:

- а) $a^2 \sin^2 \frac{\pi}{2} + b^2 \cos^2 0 + 2ah \cos \pi$; в) $2 \cos \pi + b \operatorname{ctg} \frac{3}{2} \pi - 5 \sin 2 \pi$;
б) $3 \cos^2 \frac{\pi}{2} - 4 \sin^2 \frac{3\pi}{2} + 8 \operatorname{tg} \pi$; г) $2 \operatorname{tg} 0 + \sin \pi - \cos^2 \frac{3}{2} \pi - \operatorname{ctg} \pi$.

600. Ҳисоб кунед.

- а) $2 \sin \frac{\pi}{3} + 2 \cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$; в) $a \sin \pi + b \cos \pi + \operatorname{tg} \pi$;
б) $2 \cos \pi + 3 \cos 3\frac{\pi}{2} + 6 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$; г) $m \cos \frac{\pi}{2} + n \cos \pi + p \sin 3\frac{\pi}{2} + q \operatorname{tg} 2 \pi$.

601. Ҳисоб кунед.

- а) $2 \cos 60^\circ + \sqrt{3} \cos 30^\circ$; г) $3 \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$;
б) $5 \sin 30^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ$; г) $4 \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \sin 60^\circ$;
в) $2 \sin 30^\circ + 6 \cos 60^\circ - 4 \operatorname{tg} 45^\circ$; д) $12 \sin 60^\circ \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ$.

602. Якчанд қимати α -ро ёбед, ки барои онҳо:

- а) $\cos \alpha = 0$; б) $\sin \alpha = 1$; в) $\operatorname{ctg} \alpha = 0$
бошад.

603. Якчанд қимати φ -ро ёбед, ки барои онҳо:

- а) $\sin \varphi = \frac{1}{2}$; б) $\cos \varphi = 1$; в) $\cos \varphi = 0$; г) $\operatorname{tg} \varphi = 0$ бошад.

604. Дар давраи воҳиди нуқтаи $P_a(x_a; y_a)$ -ро тасвир кунед, ки:

- а) $x_a > 0$, б) $y_a > 0$, в) $y_a < 0$, г) $y < 0$,
 $y_a > 0$; $x_a < 0$; $x_a < 0$; $x_a > 0$

бошад.

605. Аломати ҳосили зарбро муайян кунед:

$$\sin 67^\circ \cdot \cos 267^\circ \cdot \cos 375^\circ \cdot \sin(-68^\circ) \cos(-68^\circ) \cdot \sin 2.$$

606. Якчанд кунчи α -ро ёбед, ки дар онҳо ифодаи:

- а) $\operatorname{tg} \alpha$ маъно надорад; б) $\operatorname{ctg} \alpha$ маъно надорад.

607. Оё $\cos \alpha$ қиматҳои

- а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sqrt{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sqrt{3}$ -ро қабул карда метавонад?

608. Магар адади α -и баробарихоии зеринро қонсгардонанда вучуд дорад?

- а) $\sin \alpha = \frac{7}{25}$; $\cos \alpha = \frac{24}{25}$; в) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{7}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{7}{4}$.
 б) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$; $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$;

609. Агар:

- а) $\alpha = 0^\circ$; б) $\alpha = 45^\circ$; в) $\alpha = 90^\circ$; г) $\alpha = 180^\circ$

бошад, қимати ифодаи $\sin \alpha + \cos \alpha$ -ро ёбед.

610. Ҳисоб кунед:

- а) $2\sin \frac{\pi}{3} + 2\cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$; в) $\alpha \sin \pi + b \cos \pi + \operatorname{ctg} \pi$.
 б) $2\cos \pi + 3\cos 3\frac{\pi}{2} + 6\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$;

611. Агар:

- а) $\alpha = 15^\circ$; б) $\alpha = 30^\circ$; в) $\alpha = 90^\circ$

бошад, қимати ифодаи $\cos 2\alpha + \cos 3\alpha$ -ро ёбед

Машиқҳо барои тақрор

612. Ифодаро сода кунед:

$$\left[\frac{2}{(-a)^3} \right]^2 + \left[\left(-\frac{2}{a} \right)^3 \right]^2 + \left(-\frac{2}{a^3} \right)^3 - 2 \left(-\frac{2}{a^3} \right)^2 - \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{2}{a} \right)^2 \right]^3.$$

613. Ҳисоб кунед:

- а) $(3,52 : 1,1 + 6,2) \cdot (7,2 - 4,62 : 2,2)$;
 б) $(2,86 : 2,6 - 0,8) - (3,4 + 7,04 : 3,2)$.

614. Нуқтаи буриши хати ростии $x+y=2$ ва давраи $x^2+y^2=100$ -ро ёбед.

615. Муодиларо ҳал кунед:

$$x - 7 - 9x = 4x - 3 - 8x.$$

616. Нобаробарихоро ҳал кунед:

- а) $x^2 < 16$; б) $x^2 \geq 2$.

617. Асоси росткунча ба 8 см баробар буда, баландии он аз асосаш 2 см зиёд аст. Периметр ва масоҳати росткунчаро ёбед.

618. Прогрессияи арифметикӣ бо формулаи $a_n = 3n + 2$ дода шудааст. Суммаи 20 аъзои аввалаи онро ёбед.

§11. АЙНИЯТҲОИ АСОСИИ ТРИГОНОМЕТРИ ВА ТАТБИҚИ ОНҲО

31. Баъзе хосиятҳои функсияҳои тригонометрӣ

Аломати функсияҳои синус, косинус, тангенс ва котангенс дар чорякҳои гуногун муайян менамояд.

Бигзор, ҳангоми радиуси $OA=R$ ба кунҷи α гардиш додан, нуқтаи A ба нуқтаи $B(x;y)$ табдил ёбад. (Расми 110.)

Мувофиқи таъриф $\sin \alpha = \frac{y}{R}$, бинобар ин аломати $\sin \alpha$ ба y вобаста аст. Қимати синус барои кунҷҳои дар чунин чорякҳо таъиншаванда мусбат мешавад, ки дар ин чорякҳо ординатаи нуқтаҳо мусбат мебошанд.

Бинобар ин, синусҳои дар нимҳамвории болоӣ (чорякҳои I ва II) таъиншаванда мусбат ва синусҳои кунҷҳои дар нимҳамвории поёнӣ (чорякҳои III ва IV) таъиншаванда манфӣ мебошанд.

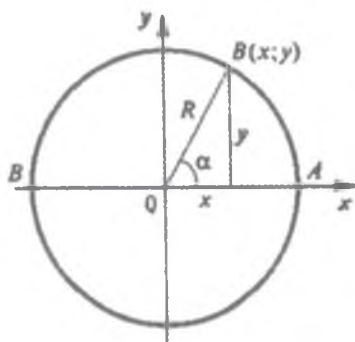
Азбаски $\cos \alpha = \frac{x}{R}$ аст, бинобар ин аломати $\cos \alpha$ ба аломати x вобаста аст, қимати косинус барои кунҷҳои дар чунин чорякҳо таъиншаванда мусбат мешавад, ки дар ин чорякҳо абсиссаҳои нуқтаҳо мусбат мебошанд.

Аз ин рӯ, косинусҳои кунҷҳои дар нимҳамвории рост (чорякҳои I ва IV) таъиншаванда мусбат, косинусҳои кунҷҳои дар нимҳамвории чап (чорякҳои II ва III) таъиншаванда манфӣ мебошанд.

Азбаски $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$ аст, пас аломатҳои $\operatorname{tg} \alpha$ ва $\operatorname{ctg} \alpha$ ба аломатҳои x ва y вобаста мебошанд.

Бинобар ин, тангенс ва котангенсҳои кунҷҳои дар чорякҳои I ва III таъиншаванда мусбат, тангенс ва котангенсҳои кунҷҳои дар чорякҳои II ва IV таъиншаванда манфӣ мебошанд.

Аломатҳои синус, косинус, тангенс ва котангенс дар ҳар яки ин чорякҳо дар расми 111 нишон дода шудаанд.

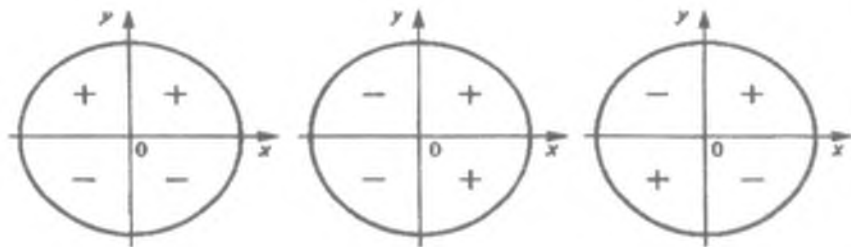


Расми 110

Акнун, масъалаи ҷуфт ва тоқ будани функсияҳои тригонометрӣ аниқ мекунем.

Чӣ тавре дида будем (ниг. ба §1-и п. 3), агар қимати функсия дар вақти ба қимати муқобилаш иваз кардани аргумент тағйир наёбад, функсияро ҷуфт меноманд, яъне агар $y=y(x)$ функсия бошад, пас он ҷуфт аст, агар $y(-x)=-y(x)$ бошад. Функсияи $y=x^2$ мисоли одитарини функсияи ҷуфт аст, зеро

$$y(-x)=(-x)^2=x^2=y(x).$$



Аломати синус

Аломати косинус

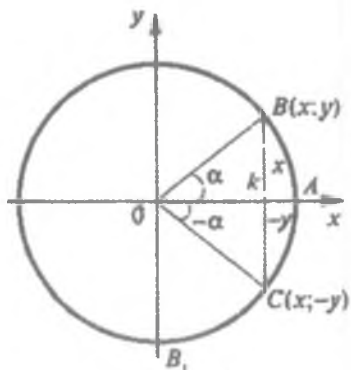
Аломати тангенс
ва котангенс

Расми 111

Агар ҳангоми ба адади муқобил иваз кардани аргументи функция қимати он ба адади муқобилаш иваз шавад, яъне $y(-x) = -y(x)$ бошад, он гоҳ функцияро тоқ меномем. Функцияи $y = x^3$ мисоли функсияи тоқ аст, зеро $(-x)^3 = -x^3 = -y$.

Фарз мекунем, ки кунчи α дода шудааст. Кунчи α -ро дида мебароем. Кунҷҳои ба ҳам муқобили α ва $-\alpha$ дар натиҷаи аз вазъияти аввалини OA ба самтҳои ба ҳам муқобил як хел гардиш додани радиуси ҳаракатнок ташкил меёбанд.

Ҳангоми ба кунчи α гардиш додан радиуси OA он ба радиуси OB бадал мешавад ва ҳангоми ба кунчи $-\alpha$ гардиш додани ҳамон радиуси он ба радиуси OC бадал мешавад (расми 112). Нуктаҳои B ва C -ро бо порча пайваст карда, секунҷаи баробарпахлӯи BOC -ро ҳосил менамоем. OA биссектрисаи кунчи BOC мебошад. Пас, порчаи Ok медиана ва баландии секунҷаи BOC аст. Аз ин ҷо бармеояд, ки нуктаҳои B ва C нисбат ба тире абсисса симметрианд.



Расми 112

Координатаҳои нуктаҳои $B(x; y)$ ва $C(x; -y)$ -ро муқоиса намуда, ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= \frac{-y}{R} = -\frac{y}{R} = -\sin\alpha; & \cos(-\alpha) &= \frac{x}{R} = \cos\alpha; \\ \operatorname{tg}(-\alpha) &= \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\operatorname{tg}\alpha; & \operatorname{ctg}(-\alpha) &= \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\operatorname{ctg}\alpha \end{aligned}$$

Ҳамин тавр:

Косинус функцияи чуфт:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

синус, тангенс ва котангенс функцияҳои тоқ мебошанд:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha; \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

Масалан:

$$1) \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}.$$

$$2) \cos(-135^\circ) = \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin(-135^\circ) = -\sin 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg}(-135^\circ) = -\operatorname{tg} 135^\circ = 1;$$

$$\operatorname{ctg}(-135^\circ) = -\operatorname{ctg} 135^\circ = 1;$$

?

1. Синус, косинус, тангенс ва котангенс дар ҳар як чоряки координатавӣ чӣ ҳел аломат доранд? 2. Кадоме аз функсияҳои тригонометрӣ, функсияи чуфт ва кадомашон тоқ мебошанд? 3. Нуқтаҳои ба тири ордината симметрибуда мутааллиқи кадом кунҷҳо мебошанд?

619. Агар: а) $\alpha=45^\circ$; б) $\alpha=120^\circ$; в) $\alpha=365^\circ$; г) $\alpha=310^\circ$; ғ) $\alpha=275^\circ$ бошад, аломати $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ва $\operatorname{ctg}\alpha$ -ро муайян кунед.

620. Аломати ифодаи зеринро муайян намоед:

а) $\sin 67^\circ$; б) $\cos 267^\circ$; в) $\cos 375^\circ$; г) $\sin(-68^\circ)$; ғ) $\cos(-68^\circ)$.

621. Ин ифода чӣ гуна аломат дорад?

а) $\sin 325^\circ$; б) $\cos 275^\circ$; в) $\operatorname{tg} 420^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 420^\circ$; ғ) $\sin 25^\circ$

622. а) $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$; б) $\operatorname{tg}\alpha$ ва $\operatorname{ctg}\alpha$; в) $\cos\alpha$ ва $\operatorname{tg}\alpha$ дар кадом чорякҳо аломати якхела доранд?

623. Қимати ифодаро ёбед:

а) $\sin 45^\circ$; б) $\cos(-90^\circ)$; в) $\sin 210^\circ$; г) $\sin 180^\circ$; ғ) $\cos(-45^\circ)$.

624. Қимати ифодаҳои зеринро ёбед:

а) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$ -ро ҳангоми $\alpha=30^\circ$ будан;

б) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}$ -ро ҳангоми $\alpha=90^\circ$ будан.

Машиқҳо барои тақрор

625. Ҳисоб кунед:

$$а) \frac{2 \cdot 5^{22} - 9 \cdot 5^{21}}{25^{10}};$$

$$б) 2\sqrt{48} + \sqrt{27} + \sqrt{12}.$$

626. Нобаробариро ҳал кунед:

$$а) x^2 - 3x > 0;$$

$$б) (x-5)x + 4x > 2.$$

627. Адади 336-ро ба зарбкунандаҳои сода чудо кунед.

628. Прогрессияи геометрии (b_n) дода шудааст. Агар:

$$а) b_n = 72,9, q = 1,5; \quad б) b_n = \frac{16}{9}, q = \frac{2}{3}$$

бошад, суммаи ҳафт аъзои аввалии онро ёбед.

32. Муносибатҳои байни функсияҳои тригонометрии як кунҷ

Муносибатҳои асосиро мукаммал мекунем, ки бо онҳо қиматҳои чор функсияи тригонометрии аргументи додашуда алоқаманданд.

Бигзор, ҳангоми ба кунҷи α дар атрофи нуқтаи O гардиш додани радиуси OA радиуси OB ҳосил шавад (расми 113). Мувофиқи таърифи синус ва косинус

$$\sin \alpha = \frac{y}{R}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{R}$$

ки дар ин ҷо x - абсиссаи нуқтаи B , y - ординатаи нуқтаи B , R - радиуси давра мебошад. Азбаски нуқтаи B мутааллиқи давра мебошад, бинобар ин координатаҳои он муодилаи давраи

$$x^2 + y^2 = R^2$$

-ро қаноат мекунамд. Ба ҷойи x ва y ифодаҳои $R \cos \alpha$ ва $R \sin \alpha$ -ро гузошта, ҳосил мекунем:

$$(R \cos \alpha)^2 + (R \sin \alpha)^2 = R^2, \quad R^2 \cos^2 \alpha + R^2 \sin^2 \alpha = R^2.$$

Ҳар ду қисми баробариро ба R^2 тақсим намуда, ҳосил мекунем:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \quad (1)$$

Суммаи квадратҳои косинус ва синуси як хел аргумент ба як баробар аст. Мувофиқи таърифи тангенс ва котангенс

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{R \sin \alpha}{R \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{ва} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} = \frac{R \cos \alpha}{R \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

агар $\cos \alpha \neq 0$ ва $\sin \alpha \neq 0$ бошад.

Ҳамин тариқ,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (2)$$

Айнияти (2)-ро аъзо ба аъзо зарб намуда, ҳосил мекунем:

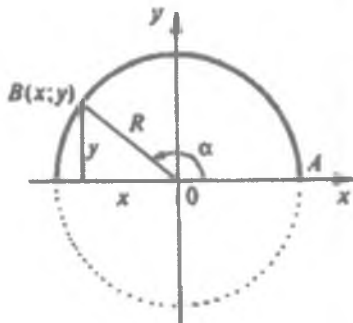
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1 \\ \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha &= 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Баробарии (3) чӣ тавр ба якдигар алоқаманд будани тангенс ва котангенс кунҷи α -ро нишон медиҳад. Ин баробарӣ барои ҳамаи қиматҳои α , ки барояшон $\operatorname{tg} \alpha$ ва $\operatorname{ctg} \alpha$ маъно дорад, дуруст аст.

Айнияти (1)-ро аввал ба $\cos^2 \alpha$, баъд ба $\sin^2 \alpha$ аъзо ба аъзо тақсим намуда, ҳосил мекунем:

$$1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{ва} \quad \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{ва} \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$



расми 113

Баробариҳои (1)-(4) айниятҳои асосии тригонометрӣ ном доранд.

Ҳар гуна айнияти тригонометрӣ барои ҳамаи қиматҳои имконпазири аргумент, яъне барои ҳамаи он қиматҳои аргументе, ки таърифи рост ва ҷаъ маъно дорад, дуруст аст. Ин айниятҳо имконияти медиҳанд, ки ҳангоми дода шудани қимати яке аз функсияҳои тригонометрӣ қиматҳои боқимонда ёфта шаванд.

Мисолҳоро дида мебароем.

Мисоли 1. Маълум аст, ки $\cos \alpha = 0,6$ ва $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ мебошад. $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ -ро меёбем.

Ҳал. Аз айнияти (1) ҳосил мекунем: $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$. Азбаски синус дар ҷоряки II мусбат мебошад, бинобар ин пеш аз решави аломати плюси мондан лозим аст. Ҳамин тариқ,

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - 0,36} = \sqrt{0,64} = 0,8;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,8}{-0,6} = -\frac{4}{3}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-0,6}{0,8} = -\frac{3}{4}.$$

Мисоли 2. Бигзор, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ва $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ бошад. $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ -ро меёбем.

Ҳал. Кунчи α дар ҷоряки II тамом мешавад, ки дар он косинус, тангенс ва котангенс манфӣ мебошанд, бинобар ин

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}.$$

?

1. Айниятҳои асосии тригонометрӣ номбар намуда, онҳоро исбот кунед. 2. Барои кадом кунҷҳо айниятҳои (2) ва (3) дурустанд? 3. Имконияти истифодаи ин айниятҳо дар чӣ зоҳир мегардад?

629. Қимати функсияҳои тригонометрии кунҷи α -ро ёбед, агар маълум бошад, ки

а) $\sin \alpha = 0,6$; $0^\circ < \alpha < 90^\circ$; в) $\sin \alpha = \frac{1}{k}$; $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

б) $\operatorname{tg} \alpha = 2$; $0^\circ < \alpha < 270^\circ$;

630. Ифодаҳо сода кунед:

а) $1 - \cos^2 \alpha$; г) $\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \cos \beta}$; е) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$

б) $\sin \alpha - 1$; г) $\frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$; ё) $\frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$

в) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$; д) $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$

631. Ифодаро табдил диҳед:

а) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$ б) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$

632. Ифодаҳоро табдил диҳед:

а) $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}$; б) $\frac{\sin \Delta \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \alpha$
 в) $\left(1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sin^2 \alpha}\right)$; г) $\frac{1 + \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} : \left[1 + \left(\frac{1 + \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}\right)^2\right]$

633. Маълум аст, ки $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Агар:

а) $\cos \alpha = -0,6$ бошад, $\sin \alpha$ -ро; в) $\cos \alpha = -\frac{15}{17}$ бошад, $\operatorname{tg} \alpha$ -ро;
 б) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ бошад, $\cos \alpha$ -ро; г) $\operatorname{ctg} \alpha = -2$ бошад, $\sin \alpha$ -ро ёбед.

634. Қимати функцияҳои тригонометрии кунчи α -ро ёбед, агар маълум бошад, ки

а) $\sin \alpha = 0,96$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; в) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
 б) $\sin \alpha = -0,8$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; д) $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;
 в) $\sin \alpha = 0,6$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; е) $\cos \alpha = 0,6$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;
 г) $\sin \alpha = -0,3$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; ё) $\cos \alpha = \frac{2}{3}$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Машқҳо барои такрор

635. Ифодаро сода кунед:

а) $\sqrt{242} - \sqrt{200} + \sqrt{8}$; в) $\sqrt{98} - \sqrt{72} + 0,5\sqrt{8}$.
 б) $\sqrt{75} - 0,1\sqrt{300} + \sqrt{27}$;

636. Қимати ифодаро ёбед:

а) $\sqrt{5x - 10}$ ҳангоми $x=2$; $x=2,2$; $x=5,2$; $x=22$;
 б) $\sqrt{6 - 2y}$ ҳангоми $y=1$; $y=-1,5$; $y=-15$; $y=-37,5$;
 в) $\sqrt{2a - b}$ ҳангоми $a=0$; $b=0$; $a=4$; $b=7$;
 г) $\sqrt{m - 4n}$ ҳангоми $m=0$; $n=-1$; $m=33$; $n=2$.

637. Касрро ихтисор кунед:

а) $\frac{(3x-6)^2}{(2-x)^2}$; б) $\frac{a^2+8a+16}{(2a+8)^2}$

638. Нобаробариро ҳал кунед: „

а) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} < 5$; б) $\frac{3y}{2} - \frac{y}{2} \geq 2$.

639. Як адад назар ба дигараш 4,5 маротиба калонтар аст. Агар аз адади калон 54-ро тарҳ кунему ба адади хурд 72-ро ҷамъ кунем, ададҳои баробар ҳосил мешаванд. Ин ададҳо ба чанд баробаранд?

640. Систекаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x + y = 8, \\ xy = -20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 0,8, \\ xy = 2,4. \end{cases}$

33. Табдилдихии ифодаҳои тригонометрӣ

Агар ифода дар таркиби худ функцияҳои тригонометриро дошта бошад, ифода тригонометрӣ номида мешавад.

Масалан, $\sin x + \cos x$, $(\sin^2 x + 1) \cdot \operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}^2 x + \frac{1}{1 + \sin^2 x} + 3$, $a^2 + 2ab \cos x$ ифодаҳои тригонометрианд.

Мо аллакай баъзе табдилоти содатарини ифодаҳои тригонометриро ба монанди $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$.

$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ муоина кардем. Ҳоло бошад, мисолҳои нисбатан мураккабро дида мебароем.

Мисоли 1. Ифодаи $\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$ -ро табдил медиҳем.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \sin^2 \alpha = \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 2 \right) \sin^2 \alpha = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Мисоли 2. Ифодаи $\operatorname{ctg}^2 \alpha (\cos \alpha - 1)$ -ро сода мекунем. Аз формулаҳои $\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$ ва $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ истифода карда, ҳосил мекунем: $\operatorname{ctg}^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 1) = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} (\sin^2 \alpha) = -\cos^2 \alpha$.

Мисоли 3. Ифодаи $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$ -ро сода мекунем.

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha + (1 + \cos \alpha)^2}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{\sin^2 \alpha + 1 + 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \\ &= \frac{2 + 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{2(1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{2}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Мисоли 4. Айнияти $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$ -ро исбот мекунем. Қисми чапи ин баробариро табдил медиҳем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right) = \sin^2 \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha - 1) = \\ &= \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Мисоли 5. Айнияти $\frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2$ -ро исбот мекунем. Қисми ростии ин баробариро табдил медиҳем.

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 &= \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = \left(\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} \right)^2 = \\ &= \frac{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2}{(\sin \alpha \cos \alpha)^2} = \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

?

1. Кадом формула алокамандии байни функцияҳои $\sin \alpha$ ва $\cos \alpha$ -ро ифода мекунад? 2.) Ҳамаи он айниятҳои тригонометрие, ки ба шумо маълум аст, номбар кунед. 3. Аломати қимати $\sin \alpha$ ва $\cos \alpha$ -ро нишон диҳед, агар кунчи α дар а) чоряки якуми координатаҳо б) дар чоряки дуюми координатаҳо; в) дар чоряки сеюми координатҳо; г) дар чоряки чоруми координатҳо қойгир бошад.

641. Ифодаро сода кунед:

а) $1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha}$; б) $\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1$; в) $1 - \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}$; г) $\frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha - \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha}$

642. Ифодаро табдил диҳед:

а) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - 1}$; в) $(\operatorname{tg} \alpha + 1)^2 + (\operatorname{tg} \alpha - 1)^2$; г) $\operatorname{ctg} \alpha + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$;
б) $\frac{\cos \beta}{1 - \sin \beta} + \frac{\cos \beta}{1 + \sin \beta}$; г) $(\operatorname{ctg} \beta + 1)^2 + (\operatorname{ctg} \beta - 1)^2$; д) $\operatorname{tg} \beta + \frac{\cos \beta}{1 + \sin \beta}$.

643. Айниятро исбот кунед:

а) $(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha) = \sin^2 \alpha$; в) $1 + \cos \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha$;
б) $1 + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha$; г) $2 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1$.

644. а) Ифодаи $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$ ба чӣ баробар аст?

б) Ифодаи $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha$ ба чӣ баробар аст?

в) Ифодаи $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$ ба чӣ баробар аст?

645. Оё синуси α ба а) $\frac{2}{3}$; б) $0,8$; в) $\frac{3}{2}$; г) 2 ; г) 1 ; д) 3 баробар мешавад?

646. Айниятро исбот кунед:

а) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$; б) $(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = 1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

647. Ифодаро сода кунед:

а) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha$; б) $(\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha)^2 + (1 - \cos \alpha)^2$.

Машиқҳо барои тақрор

648. Касрро ихтисор кунед:

$$\frac{6a^2 - 7a - 3}{2a^2 - a - 3}.$$

649. Системаро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = -4, \\ 3x + 8y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = -2, \\ x^2 + y^2 = 100. \end{cases}$

650. Қайки мотордор, ки суръаташ 20 км/соат аст, барои рафтуомади байни ду истгоҳи дарё 6 соату 15 дақиқа вақт сарф мекунад. Суръати оби дарёро ёбед, агар масофаи байни истгоҳҳо 60 км бошад.

651. Кубури якум ҳавзро нисбат ба кубури дуюм 3 соат зудтар бо об пур мекунад. Барои бо об пур кардани ҳавз ҳарду кубурро кушоданд ва баъд аз 10 соат кубури якумро бастанд. Баъд